если только $t>0$ достаточно малое число. Величина этой площади, умноженная на $c\rho$, равна количеству тепла, помещенному в начальный момент. Таким образом, для малых значений $t>0$ почти все тепло сосредоточено в малой окрестности точки $x=\xi$. Из сказанного выше следует, что в момент времени $t=0$ все количество тепла помещается в точке $x=\xi$, т. е. мы имеем мгновенный точечный источник тепла.

Теперь нетрудно дать физическое толкование и решению (10). Действительно, для того чтобы придать сечению $x=\xi$ стержня температуру $\varphi(\xi)$ в начальный момент, мы должны распределить на малом элементе $d\xi$ около этой точки количество тепла $dQ = c\rho\varphi(\xi)\,d\xi$ или, что то же самое, поместить в точке ξ мгновенный точечный источник тепла напряжения dQ; распределение температуры, вызываемое этим мгновенным точечным источником, согласно формуле (11), будет

$$\varphi(\xi)\,d\xi\,\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\,e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}}.$$

Общее же действие от начальной температуры $\varphi(\xi)$ во всех точках стержня суммируется из этих отдельных элементов, что и дает нам полученное выше решение (10).

Мы рассмотрели распространение тепла в неограниченном стержне. Аналогично, в случае распространения тепла в неограниченном пространстве мы имеем уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)$$

и начальное условие

$$u\,|_{t=0}=\varphi(x,\ y,\ z),$$

и решением будет функция

$$u(x, y, z, t)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\varphi(\xi,\eta,\zeta)\,\frac{1}{(2a\sqrt{\pi t})^3}\,e^{-\frac{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2+(\zeta-z)^2}{4a^2-t}}\,d\xi\,d\eta\,d\zeta.$$

§ 2. Распространение тепла в полуограниченном стержне

Рассмотрим задачу о распространении тепла в *полуограниченном стержне*, боковая поверхность которого теплоизолирована. Пусть конец $x=0$ поддерживается при заданной температуре, которая может изменяться с течением времени. Тогда задача сводится к решению уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\qquad(0<x<\infty,\ t>0),\tag{16}$$

при граничном условии

$$u\,|_{x=0}=\psi(t)\qquad(t\geqslant 0)\tag{17}$$

и начальном условии

$$u|_{t=0}=\varphi(x) \qquad (x\geqslant 0). \tag{18}$$

Решение задачи (16)—(18) будем искать в виде суммы

$$u=v+w, \tag{19}$$

где v и w суть решения следующих задач:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial v}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2},\\ &v|_{x=0}=0,\\ &v|_{t=0}=\varphi(x), \end{aligned}\right\}\ (\mathrm{I}) \qquad \left.\begin{aligned} &\frac{\partial w}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}.\\ &w|_{x=0}=\psi(t),\\ &w|_{t=0}=0. \end{aligned}\right\}\ (\mathrm{II})$$

Решим сначала задачу (I). Решение задачи (I) может быть получено из решения, найденного нами для неограниченного стержня. Действительно, перепишем формулу (10) в виде

$$v(x,\ t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_0^\infty\left[\varphi(\xi)\,e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}}+\varphi(-\xi)\,e^{-\frac{(\xi+x)^2}{4a^2t}}\right]d\xi. \tag{20}$$

Удовлетворяя граничному условию, будем иметь

$$v|_{x=0}=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_0^\infty e^{-\frac{\xi^2}{4a^2t}}\,[\varphi(\xi)+\varphi(-\xi)]\,d\xi. \tag{21}$$

Это условие наверное будет выполнено, если положить *

$$\varphi(-\xi)=-\varphi(\xi) \qquad (0\leqslant\xi<\infty), \tag{22}$$

т. е. функцию $\varphi(x)$ нужно продолжить нечетным образом в промежуток $(-\infty,\ 0)$.

Подставив (22) в (21), получим решение задачи (I) в виде

$$v(x,\ t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_0^\infty\varphi(\xi)\left[e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}}-e^{-\frac{(\xi+x)^2}{4a^2t}}\right]d\xi. \tag{23}$$

Если, например, начальная температура постоянна:

$$v|_{t=0}=\varphi(x)=v_0,$$

то из (23)

$$v(x,\ t)=\frac{v_0}{2a\sqrt{\pi t}}\int_0^\infty\left[e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}}-e^{-\frac{(\xi+x)^2}{4a^2t}}\right]d\xi.$$

Разбив интеграл на два слагаемых и введя новые переменные интегрирования

$$\alpha=\frac{\xi-x}{2a\sqrt{t}}, \qquad \beta=\frac{\xi+x}{2a\sqrt{t}},$$

* Решение задачи (I) в классе ограниченных функций единственно.

получим

$$v(x, t)=\frac{v_0}{\sqrt{\pi}}\left[\int\limits_{-\frac{x}{2a\sqrt{t}}}^{\infty} e^{-\alpha^2}\,d\alpha-\int\limits_{\frac{x}{2a\sqrt{t}}}^{\infty} e^{-\beta^2}\,d\beta\right]=$$

$$=\frac{v_0}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\frac{x}{2a\sqrt{t}}}^{\frac{x}{2a\sqrt{t}}} e^{-\alpha^2}\,d\alpha=\frac{2v_0}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{0}^{\frac{x}{2a\sqrt{t}}} e^{-\alpha^2}\,d\alpha$$

или

$$v(x, t)=v_0\theta\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right), \tag{24}$$

где

$$\theta(z)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^z e^{-\alpha^2}\,d\alpha \tag{25}$$

— интеграл ошибок.

Переходим теперь к решению задачи II. Начнем с частного случая $\psi(t)=1$, т. е.

$$w|_{x=0}=1. \tag{26}$$

Легко видеть, что функция

$$w(x, t)=1-\theta\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right) \tag{27}$$

будет решением задачи (II) для этого частного случая. Пусть теперь на конце $x=0$ температура поддерживалась до момента τ равной нулю, а затем равной единице. В этом случае решение обозначим через $w_\tau(x, t)$. Очевидно, что до момента $t=\tau$ будет $w_\tau=0$, после же этого момента времени w_τ совпадает с решением (27), если там заменить t на $t-\tau$, что дает нам

$$w_\tau(x, t)=\begin{cases} 0 \quad \text{при} \quad 0\leqslant t\leqslant\tau, \\ 1-\theta\left(\dfrac{x}{2a\sqrt{t-\tau}}\right) \quad \text{при} \quad t\geqslant\tau. \end{cases}$$

Но тогда очевидно, что если на конце $x=0$ температура, равная единице, поддерживалась только в течение промежутка времени $(\tau, \tau+d\tau)$, а все остальное время она была равна нулю, то соответствующее распределение температуры вдоль стержня будет

$$w_\tau(x, t)-w_{\tau+d\tau}(x, t)=-\frac{\partial w_\tau}{\partial\tau}\,d\tau.$$

Если же на конце $x=0$ в течение промежутка времени $(\tau, \tau+d\tau)$ поддерживалась температура, равная $\psi(\tau)$, а не единице, то получим

$$-\psi(\tau)\frac{\partial w_\tau}{\partial \tau}d\tau,$$

откуда ясно, что если поддерживать на конце $x=0$ температуру $\psi(\tau)$ при всех τ, то при изменении τ от 0 до t мы получим полный эффект, сложив все элементарные эффекты, что дает нам искомое решение задачи (II) в виде

$$w(x, t)=-\int_0^t \psi(\tau)\frac{\partial w_\tau}{\partial \tau}d\tau,$$

или, так как при $t\geqslant\tau$

$$-\frac{\partial w_\tau}{\partial \tau}=\frac{\partial}{\partial \tau}\theta\left(\frac{x}{2a\sqrt{t-\tau}}\right)=$$

$$=\frac{\partial}{\partial \tau}\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\frac{x}{2a\sqrt{t-\tau}}} e^{-\alpha^2}\,d\alpha=\frac{x}{2a\sqrt{\pi}(t-\tau)^{3/2}}e^{-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}},$$

то окончательно получим

$$w(x, t)=\frac{x}{2a\sqrt{\pi}}\int_0^t \frac{\psi(\tau)}{(t-\tau)^{3/2}}e^{-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}}d\tau. \tag{28}$$

Введем вместо τ новую переменную интегрирования ξ по формуле

$$\xi=\frac{x}{2a\sqrt{t-\tau}}.$$

Тогда формула (28) запишется в виде

$$w(x, t)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{\frac{x}{2a\sqrt{t}}}^{\infty}\psi\left(t+\frac{x^2}{4a^2\xi^2}\right)e^{-\xi^2}d\xi.$$

При $x=0$ мы получим

$$w(0, t)=\psi(t)\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty e^{-\xi^2}d\xi=\psi(t),$$

т. е. решение (28) удовлетворяет граничному условию (17).

ЗАДАЧИ

1. Доказать, что неоднородное уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+f(x, t)$$

при нулевом начальном условии

$$u|_{t=0}=0$$

имеет решение вида

$$u(x,\ t)=\int_0^t\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi,\ \tau)\frac{1}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}}\,e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2(t-\tau)}}\,d\xi\,d\tau.$$

Указание. Применить метод, изложенный в гл. VIII, § 5, для неоднородного волнового уравнения.

2. Применяя метод, изложенный в § 1 этой главы, доказать, что температура неограниченной тонкой пластинки выражается формулой

$$u(x,\ y,\ t)=\frac{1}{4\pi a^2 t}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\xi,\ \eta)\,e^{-\frac{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2}{4a^2t}}\,d\xi\,d\eta.$$

3. Дан полуограниченный стержень с теплоизоляцией боковой поверхности, начальная температура которого известна. На конце $x=0$ происходит свободный теплообмен с окружающей средой. Найти распределение температуры в стержне в любой момент времени $t>0$.

Ответ:

$$u(x,\ t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_0^{\infty}\left\{\varphi(\xi)\left[e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}}-e^{-\frac{(\xi+x)^2}{4a^2t}}\right]-2he^{-h\xi}\int_0^{\xi}e^{h\mu}\varphi(\mu)\,d\mu\right\}d\xi,$$

где h — коэффициент теплообмена.

Глава XXVIII

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ФУРЬЕ К РЕШЕНИЮ ГРАНИЧНЫХ ЗАДАЧ

§ 1. Распространение тепла в ограниченном стержне

1. Распространение тепла в стержне, концы которого поддерживаются при нулевой температуре. Задача состоит в отыскании решения уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{1}$$

при граничных условиях

$$u|_{x=0}=0,\qquad u|_{x=l}=0 \tag{2}$$

и при начальном условии

$$u|_{t=0}=\varphi(x), \tag{3}$$

где $\varphi(x)$ — непрерывна, имеет кусочно-непрерывную производную и обращается в нуль при $x=0$ и $x=l$.