при нулевом начальном условии

$$u|_{t=0}=0$$

имеет решение вида

$$u(x,\ t)=\int_0^t\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi,\ \tau)\frac{1}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}}\,e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2(t-\tau)}}\,d\xi\,d\tau.$$

Указание. Применить метод, изложенный в гл. VIII, § 5, для неоднородного волнового уравнения.

2. Применяя метод, изложенный в § 1 этой главы, доказать, что температура неограниченной тонкой пластинки выражается формулой

$$u(x,\ y,\ t)=\frac{1}{4\pi a^2 t}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\xi,\ \eta)\,e^{-\frac{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2}{4a^2t}}\,d\xi\,d\eta.$$

3. Дан полуограниченный стержень с теплоизоляцией боковой поверхности, начальная температура которого известна. На конце $x=0$ происходит свободный теплообмен с окружающей средой. Найти распределение температуры в стержне в любой момент времени $t>0$.

Ответ:

$$u(x,\ t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_0^{\infty}\left\{\varphi(\xi)\left[e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}}-e^{-\frac{(\xi+x)^2}{4a^2t}}\right]-2he^{-h\xi}\int_0^{\xi}e^{h\mu}\varphi(\mu)\,d\mu\right\}d\xi,$$

где h — коэффициент теплообмена.

Глава XXVIII

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ФУРЬЕ К РЕШЕНИЮ ГРАНИЧНЫХ ЗАДАЧ

§ 1. Распространение тепла в ограниченном стержне

1. Распространение тепла в стержне, концы которого поддерживаются при нулевой температуре. Задача состоит в отыскании решения уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{1}$$

при граничных условиях

$$u|_{x=0}=0,\qquad u|_{x=l}=0 \tag{2}$$

и при начальном условии

$$u|_{t=0}=\varphi(x), \tag{3}$$

где $\varphi(x)$ — непрерывна, имеет кусочно-непрерывную производную и обращается в нуль при $x=0$ и $x=l$.

Согласно методу Фурье, ищем частные решения уравнения (1) в виде

$$u(x, t) = X(x)\,T(t). \tag{4}$$

Подставляя (4) в (1), имеем

$$X(x)\,T'(t) = a^2\,T(t)\,X''(x)$$

или

$$\frac{T'(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda,$$

откуда получаем два уравнения

$$T'(t) + a^2\lambda\,T(t) = 0, \tag{5}$$

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0. \tag{6}$$

Чтобы получить нетривиальное решение уравнения (1) вида (4), удовлетворяющее граничным условиям (2), необходимо найти нетривиальное решение уравнения (6), удовлетворяющее граничным условиям

$$X(0) = 0, \quad X(l) = 0. \tag{7}$$

Таким образом, для определения функций $X(x)$ мы приходим *к задаче о собственных значениях*

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \quad X(0) = 0, \quad X(l) = 0, \tag{8}$$

исследованной в задаче о колебании ограниченной струны (см. гл. X, § 1). Там было показано, что только для значений параметра λ, равных

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 \qquad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots), \tag{9}$$

существуют нетривиальные решения задачи (8):

$$X_n(x) = \sin\frac{n\pi x}{l}. \tag{10}$$

Значениям параметра $\lambda = \lambda_n$ соответствуют решения уравнения (5):

$$T_n(t) = a_n e^{-\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 t}, \tag{11}$$

где a_n — произвольные постоянные. Итак, все функции

$$u_n(x, t) = X_n(x)\,T_n(t) = a_n e^{-\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 t} \sin\frac{n\pi x}{l} \tag{12}$$

удовлетворяют уравнению (1) и граничным условиям (2) при любых постоянных a_n.

Составим ряд

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 t} \sin\frac{n\pi x}{l}. \tag{13}$$

Требуя выполнения начального условия (3), получим

$$u(x, 0) = \varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin \frac{n\pi x}{l}. \tag{14}$$

Написанный ряд представляет собою разложение заданной функции $\varphi(x)$ в ряд Фурье по синусам в промежутке $(0, l)$. Коэффициенты a_n определяются по известной формуле

$$a_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx. \tag{15}$$

Так как мы предположили, что функция $\varphi(x)$ непрерывна, имеет кусочно-непрерывную производную и обращается в нуль при $x=0$ и $x=l$, то ряд (14) с коэффициентами a_n, определяемыми по формуле (15), равномерно и абсолютно сходится к $\varphi(x)$, что известно из теории тригонометрических рядов [34].

Так как при $t \geqslant 0$

$$0 < e^{-\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 t} \leqslant 1,$$

то ряд (13) при $t \geqslant 0$ также сходится абсолютно и равномерно. Поэтому функция $u(x, t)$, определяемая рядом (13), непрерывна в области $0 \leqslant x \leqslant l$, $t \geqslant 0$ и удовлетворяет начальному и граничным условиям. Остается показать, что функция $u(x, t)$ удовлетворяет уравнению (1) в области $0 < x < l$, $t > 0$. Для этого достаточно показать, что ряды, полученные из (13) почленным дифференцированием по t один раз и почленным дифференцированием по x два раза, также абсолютно и равномерно сходятся в области $0 < x < l$, $t > 0$. А это последнее утверждение следует из того, что при любом $t > 0$

$$0 < \left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 e^{-\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 t} < 1, \quad 0 < \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 e^{-\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 t} < 1,$$

если n достаточно велико.

Совершенно так же можно показать существование у функции $u(x, t)$ непрерывных производных любого порядка по x и t в области $0 < x < l$, $t > 0$.

2. Распространение тепла в стержне, концы которого находятся при заданных переменных температурах. Эта задача сводится к решению уравнения теплопроводности (1) при граничных условиях

$$u|_{x=0} = \psi_1(t), \quad u|_{x=l} = \psi_2(t) \tag{16}$$

и начальном условии

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \tag{17}$$

где $\psi_1(t)$, $\psi_2(t)$ и $\varphi(x)$ — заданные функции.

Решение ищем в виде ряда

$$u(x,\ t)=\sum_{n=1}^{\infty} T_n(t)\sin\frac{n\pi x}{l}, \tag{18}$$

где

$$T_n(t)=\frac{2}{l}\int_0^l u(x,\ t)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx. \tag{19}$$

Интегрируя два раза по частям, получим

$$T_n(t)=\frac{2}{n\pi}\left[u(0,\ t)-(-1)^n u(l,\ t)\right]-\frac{2l}{n^2\pi^2}\int_0^l \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx.$$

Так как $u(x,\ t)$ удовлетворяет уравнению (1) и граничным условиям (16), то

$$T_n(t)=\frac{2}{n\pi}\left[\psi_1(t)-(-1)^n\psi_2(t)\right]-\frac{2l}{n^2\pi^2a^2}\int_0^l \frac{\partial u}{\partial t}\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx. \tag{20}$$

Дифференцируя теперь выражение (19) по t, получим

$$\frac{dT_n(t)}{dt}=\frac{2}{l}\int_0^l \frac{\partial u}{\partial t}\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx. \tag{21}$$

Исключая интеграл из равенств (20) и (21), получим следующее уравнение для определения коэффициентов $T_n(t)$:

$$\frac{dT_n(t)}{dt}+\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 T_n(t)=\frac{2n\pi a^2}{l^2}\left[\psi_1(t)-(-1)^n\psi_2(t)\right]. \tag{22}$$

Общее решение этого уравнения имеет вид

$$T_n(t)=e^{-\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 t}\left[C_n+\frac{2n\pi a^2}{l^2}\int_0^t e^{\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2\tau}(\psi_1(\tau)-(-1)^n(\psi_2(\tau))\,d\tau\right], \tag{23}$$

где, очевидно,

$$C_n=T_n(0).$$

Чтобы удовлетворить начальному условию (17), требуем выполнения равенства

$$u(x,\ 0)=\sum_{n=1}^{\infty} T_n(0)\sin\frac{n\pi x}{l}=\varphi(x)$$

и, следовательно,

$$T_n(0)=C_n=\frac{2}{l}\int_0 \varphi(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx. \tag{24}$$

Таким образом, решением задачи (1), (16)—(17) будет ряд (18), где $T_n(t)$ определяются равенствами (23) и (24).

Рассмотрим частный случай, когда концы стержня поддерживаются при постоянных температурах, т. е.

$$\psi_1(t) = u_1 = \text{const}, \quad \psi_2(t) = u_2 = \text{const}.$$

Тогда (23) принимает следующий вид

$$T_n(t) = \frac{2}{n\pi}\left[u_1 - (-1)^n u_2\right]\left[1 - e^{-\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 t}\right] + \\ + e^{-\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 t}\,\frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx.$$

Подставляя $T_n(t)$ в ряд (18), будем иметь

$$u(x, t) = \frac{2u_1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{n\pi x}{l}}{n} + \frac{2u_2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\sin\frac{n\pi x}{l}}{n} + \\ + \frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n u_2 - u_1}{n}\,e^{-\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 t}\sin\frac{n\pi x}{l} + \\ + \frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 t}\sin\frac{n\pi x}{l}\int_0^l \varphi(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx.$$

В силу известных соотношений

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\xi}{n} = \begin{cases} \frac{\pi-\xi}{n} & \text{при} \quad 0 < \xi < 2\pi, \\ 0 & \text{при} \quad \xi = 0, \quad 2\pi, \end{cases}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\sin n\xi}{n} = \begin{cases} \frac{\xi}{2} & \text{при} \quad -\pi < \xi < \pi, \\ 0 & \text{при} \quad \xi = -\pi, \ \pi, \end{cases}$$

окончательно получим

$$u(x, t) = u_1 + (u_2 - u_1)\frac{x}{l} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n u_2 - u_1}{n}\,e^{-\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 t}\sin\frac{n\pi x}{l} + \\ + \frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 t}\sin\frac{n\pi x}{l}\int_0^l \varphi(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx. \tag{25}$$

3. Распространение тепла в стержне, на концах которого происходит свободный теплообмен с окружающей средой. Задача состоит в отыскании решения уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{26}$$

при граничных условиях

$$\frac{\partial u}{\partial x} - hu\,|_{x=0} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x} + hu\,|_{x=l} = 0, \tag{27}$$

где h — коэффициент теплообмена, и при начальном условии

$$u\,|_{t=0} = \varphi(x). \tag{28}$$

Согласно методу Фурье, будем искать частные решения уравнения (26) в виде

$$u(x, t) = X(x)\,T(t). \tag{29}$$

Тогда получим уравнения

$$T'(t) + a^2\lambda^2 T(t) = 0, \tag{30}$$

$$X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0. \tag{31}$$

Чтобы частное решение (29), отличное от тождественного нуля, удовлетворяло граничным условиям (27), очевидно, нужно потребовать выполнения условий

$$X'(0) - hX(0) = 0, \quad X'(l) + hX(l) = 0. \tag{32}$$

Таким образом, мы приходим к задаче о собственных значениях для уравнения (31) при граничных условиях (31). * Интегрируя уравнение (31), получим

$$X(x) = C_1 \cos \lambda x + C_2 \sin \lambda x. \tag{33}$$

Из граничных условий (32) находим

$$\begin{gathered} hC_1 - \lambda C_2 = 0 \\ (h \cos \lambda l - \lambda \sin \lambda l)\,C_1 + (h \sin \lambda l + \lambda \cos \lambda l)\,C_2 = 0. \end{gathered} \tag{34}$$

Эта система двух однородных уравнений имеет очевидное решение $C_1 = C_2 = 0$, и мы получаем решение $X(x) \equiv 0$. Отбрасывая этот случай, мы должны считать, что по крайней мере одна из постоянных C_1, C_2 отлична от нуля. Тогда определитель системы (34) должен равняться нулю

$$\begin{vmatrix} h & -\lambda \\ h \cos \lambda l - \lambda \sin \lambda l & h \sin \lambda l + \lambda \cos \lambda l \end{vmatrix} = 0.$$

Отсюда, после замены

$$\mu = \lambda l, \quad p = hl > 0, \tag{35}$$

находим

$$2 \operatorname{ctg} \mu = \frac{\mu}{p} - \frac{p}{\mu}. \tag{36}$$

---

* В силу гл. X, § 5, все собственные значения задачи (31)—(32) положительны. Поэтому вместо λ можно писать λ^2.

Это уравнение имеет бесчисленное множество вещественных корней, в чем нетрудно убедиться, построив графики кривых (рис. 48)

$$y=2\operatorname{ctg}\mu, \quad y=\frac{\mu}{p}-\frac{p}{\mu}.$$

Из чертежа видно, что в каждом из интервалов $(0, \pi)$, $(\pi, 2\pi)$, ... лежит положительный корень уравнения (36), а отрицательные корни по абсолютной величине равны положительным.

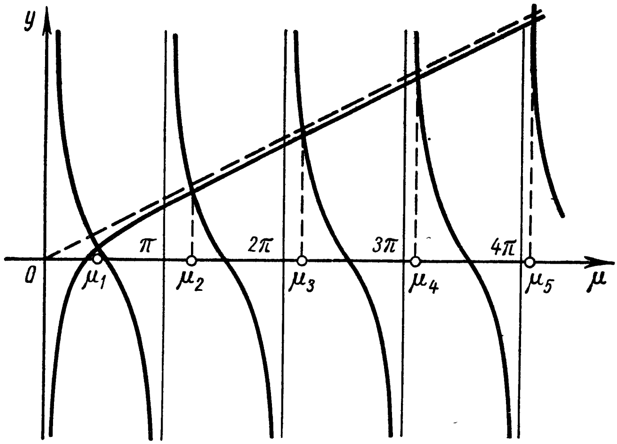

Рис. 48

Обозначим через $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \ldots$ положительные корни уравнения (36). Тогда, согласно (35), собственные значения будут

$$\lambda_n^2=\left(\frac{\mu_n}{l}\right)^2 \qquad (n=1, 2, 3, \ldots). \tag{37}$$

Каждому собственному значению соответствует собственная функция

$$X_n(x)=\cos\frac{\mu_n x}{l}+\frac{p}{\mu_n}\sin\frac{\mu_n}{l}x. \tag{38}$$

При $\lambda=\lambda_n$ общее решение уравнения (30) имеет вид

$$T_n(t)=a_n e^{-\left(\frac{\mu_n a}{l}\right)^2 t},$$

где a_n — произвольные постоянные.

Таким образом, нами найдены частные решения уравнения (26)

$$u_n(x, t)=X_n(x)\,T_n(t)=a_n e^{-\left(\frac{\mu_n a}{l}\right)^2 t}\left(\cos\frac{\mu_n x}{l}+\frac{p}{\mu_n}\sin\frac{\mu_n x}{l}\right),$$

удовлетворяющие граничным условиям (27) при любых a_n.

Составим ряд

$$u(x, t)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\left(\frac{\mu_n a}{l}\right)^2 t}\left(\cos\frac{\mu_n x}{l}+\frac{p}{\mu_n}\sin\frac{\mu_n x}{l}\right). \tag{39}$$

Удовлетворяя начальному условию (28), получим

$$\varphi(x)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n\left(\cos\frac{\mu_n x}{l}+\frac{p}{\mu_n}\sin\frac{\mu_n x}{l}\right)=\sum_{n=1} a_n X_n(x). \tag{40}$$

На основании теории задач о собственных значениях (см. гл. X, § 5), собственные функции $X_n(x)$ ортогональны, т. е.

$$\int_0^l X_n(x)\,X_m(x)\,dx=0 \quad (n\neq m). \tag{41}$$

Вычисляя квадрат нормы собственных функций (38), получим

$$\int_0^l X_n^2(x)\,dx=\int_0^l\left(\cos\frac{\mu_n x}{l}+\frac{p}{\mu_n}\sin\frac{\mu_n x}{l}\right)^2 dx=\frac{l}{2}\,\frac{p(p+2)+\mu_n^2}{\mu_n^2}. \tag{42}$$

Предполагая, что ряд (42) сходится равномерно, и принимая во внимание (41) и (42), мы найдем коэффициенты a_n по следующей формуле

$$a_n=\frac{2}{l}\,\frac{\mu_n^2}{p(p+2)+\mu_n^2}\int_0^l\varphi(x)\left(\cos\frac{\mu_n x}{l}+\frac{p}{\mu_n}\sin\frac{\mu_n x}{l}\right)dx.$$

Внося это выражение коэффициентов a_n в ряд (39), получим решение задачи (26)—(28):

$$u(x, t)=\frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\left(\frac{\mu_n a}{l}\right)^2 t}\,\frac{\mu_n\cos\frac{\mu_n x}{l}+p\sin\frac{\mu_n x}{l}}{p(p+2)+\mu_n^2}\times$$

$$\times\int_0^l\varphi(x)\left(\mu_n\cos\frac{\mu_n x}{l}+p\sin\frac{\mu_n x}{l}\right)dx. \tag{43}$$

З а м е ч а н и е. Когда на поверхности стержня происходит теплообмен со средой, температура которой принимается равной нулю, то уравнение распространения тепла в однородном стержне имеет вид:

$$\frac{\partial v}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}-cv. \tag{44}$$

Легко проверить, что уравнение (44) простой подстановкой

$$v=e^{-ct}u$$

приводится к уравненню (I) для u.