§ 2. Неоднородное уравнение теплопроводности

1. Рассмотрим неоднородное уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t) \tag{45}$$

с начальным условием

$$u/_{t=0} = 0 \tag{46}$$

и граничными условиями

$$u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = 0. \tag{47}$$

При этом предполагается, что непрерывная функция $f(x, t)$ имеет кусочно-непрерывную производную первого порядка по x и что при всех $t > 0$ выполняются условия $f(0, t) = f(l, t) = 0$.

Будем искать решение задачи (45)—(47) в виде

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \sin \frac{n\pi x}{l}, \tag{48}$$

так что граничные условия (47) удовлетворяются сами собой. Предположим, что функция $f(x, t)$, рассматриваемая как функция от x, может быть разложена в ряд Фурье:

$$f(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) \sin \frac{n\pi x}{l}, \tag{49}$$

где

$$f_n(t) = \frac{2}{l} \int_0^l f(x, t) \sin \frac{n\pi x}{l}\, dx. \tag{50}$$

Подставляя ряд (48) в уравнение (45) и принимая во внимание (49), получим

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[T_n(t) + \left(\frac{n\pi a}{l} \right)^2 T_n(t) - f_n(t) \right] \sin \frac{n\pi x}{l} = 0,$$

откуда, заменяя $\frac{n\pi a}{l}$ величиной ω_n,

$$T'_n(t) + \omega_n^2 T_n(t) = f_n(t). \tag{51}$$

Пользуясь начальным условием для $u(x, t)$:

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(0) \sin \frac{n\pi x}{l} = 0,$$

получаем начальное условие для $T_n(t)$:

$$T_n(0) = 0. \tag{52}$$

Решая обыкновенное дифференциальное уравнение (51) с нулевым начальным условием (52), находим

$$T_n(t)=\int_0^t e^{-\omega_n^2(t-\tau)} f_n(\tau)\,d\tau.$$

Подставив это выражение в ряд (48), получим решение задачи (45)—(47) в виде

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\int_0^t e^{-\omega_n^2(t-\tau)} f_n(\tau)\,d\tau\right]\sin\frac{n\pi x}{l}. \tag{53}$$

Воспользуемся выражением (50) для $f_n(\tau)$ и преобразуем найденное решение (53)

$$u(x,t)=\int_0^t\int_0^l\left\{\frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\omega_n^2(t-\tau)}\sin\frac{n\pi x}{l}\sin\frac{n\pi\xi}{l}\right\} f(\xi,\tau)\,d\xi\,d\tau=$$

$$=\int_0^t\int_0^l G(x,\xi,t-\tau)\,f(\xi,\tau)\,d\xi\,d\tau, \tag{54}$$

где

$$G(x,\xi,t-\tau)=\frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\omega_n^2(t-\tau)}\sin\frac{n\pi x}{l}\sin\frac{n\pi\xi}{l}.$$

Функция $G(x, \xi, t)$ называется функцией *мгновенного точечного источника тепла**. Функция $G(x, \xi, t)$ рассматриваемая как функция от x, представляет распределение температуры в стержне $0\leqslant x\leqslant l$ в момент времени t, вызванное действием мгновенного источника тепла напряжения $Q=c\rho$, помещенного в момент $t=0$ в точке $x=\xi$ промежутка $(0, l)$, тогда как на концах стержня все время поддерживается нулевая температура.

Если начальное условие неоднородно, то к решению (54) нужно прибавить решение однородного уравнения теплопроводности с заданным начальным условием $u(x, 0)=\varphi(x)$ и граничными условиями (47), полученное в § 1 этой главы.

2. Рассмотрим теперь тот случай, когда начальное и граничные условия неоднородные, т. е. требуется найти решение уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+f(x,t) \tag{55}$$

при начальном условии

$$u\big|_{t=0}=\varphi(x) \tag{56}$$

и при граничных условиях

$$u(0,t)=\psi_1(t),\quad u(l,t)=\psi_2(t). \tag{57}$$

* Употребительно также название *функция Грина*.

Эта задача легко сводится к задачам, рассмотренным в § 1 п. 2 и в п. 1 этого параграфа. Действительно, положим

$$u = v + w, \tag{58}$$

где функция v удовлетворяет однородному уравнению

$$\frac{\partial v}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \tag{59}$$

граничным условиям

$$v(0, t) = \psi_1(t), \quad v(l, t) = \psi_2(t) \tag{60}$$

и начальному условию

$$v|_{t=0} = \varphi(x), \tag{61}$$

а функция $w(x, t)$ удовлетворяет неоднородному уравнению

$$\frac{\partial w}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f(x, t), \tag{62}$$

граничным условиям

$$w|_{x=0} = 0, \quad w|_{x=l} = 0 \tag{63}$$

и начальному условию

$$w|_{t=0} = 0. \tag{64}$$

Очевидно, что сумма (58) является решением задачи (55)—(57).

Заметим, что задача (55)—(57) также легко сводится к задаче, рассмотренной в п. 1, если ввести новую неизвестную функцию $v(x, t)$, положив

$$u(x, t) = v(x, t) + U(x, t),$$

где

$$U(x, t) = \psi_1(t) + [\psi_2(t) - \psi_1(t)] \frac{x}{l}.$$

§ 3. Распространение тепла в бесконечном цилиндре

В этом параграфе мы займемся задачей о распространении тепла в бесконечном цилиндре, причем рассмотрим несколько случаев.

1. Рассмотрим сначала *радиальное* распространение тепла в бесконечном круговом цилиндре радиуса R, боковая поверхность которого поддерживается при постоянной температуре, равной нулю.

Поставленная таким образом задача приводится к интегрированию уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right) \tag{65}$$