Эта задача легко сводится к задачам, рассмотренным в § 1 п. 2 и в п. 1 этого параграфа. Действительно, положим

$$u = v + w, \tag{58}$$

где функция $v$ удовлетворяет однородному уравнению

$$\frac{\partial v}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \tag{59}$$

граничным условиям

$$v(0, t) = \psi_1(t), \quad v(l, t) = \psi_2(t) \tag{60}$$

и начальному условию

$$v|_{t=0} = \varphi(x), \tag{61}$$

а функция $w(x, t)$ удовлетворяет неоднородному уравнению

$$\frac{\partial w}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f(x, t), \tag{62}$$

граничным условиям

$$w|_{x=0} = 0, \quad w|_{x=l} = 0 \tag{63}$$

и начальному условию

$$w|_{t=0} = 0. \tag{64}$$

Очевидно, что сумма (58) является решением задачи (55)—(57).

Заметим, что задача (55)—(57) также легко сводится к задаче, рассмотренной в п. 1, если ввести новую неизвестную функцию $v(x, t)$, положив

$$u(x, t) = v(x, t) + U(x, t),$$

где

$$U(x, t) = \psi_1(t) + [\psi_2(t) - \psi_1(t)]\frac{x}{l}.$$

## § 3. Распространение тепла в бесконечном цилиндре

В этом параграфе мы займемся задачей о распространении тепла в бесконечном цилиндре, причем рассмотрим несколько случаев.

1. Рассмотрим сначала *радиальное* распространение тепла в бесконечном круговом цилиндре радиуса $R$, боковая поверхность которого поддерживается при постоянной температуре, равной нулю.

Поставленная таким образом задача приводится к интегрированию уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}\right) \tag{65}$$

при граничном условии

$$u|_{r=R}=0 \tag{66}$$

и при начальном условии

$$u|_{t=0}=\varphi(r), \tag{67}$$

где $\varphi$ — заданная функция от $r$.

Разыскивая, согласно методу Фурье, частные решения уравнения (65) в виде

$$u(r, t)=T(t)w(r), \tag{68}$$

мы получим два уравнения

$$T'(t)+a^2\lambda^2T(t)=0, \tag{69}$$

$$w''(r)+\frac{1}{r}w'(r)+\lambda^2w(r)=0, \tag{70}$$

где $\lambda$ — произвольный параметр.

Общее решение уравнения (70) имеет вид (см. гл. XIII, § 1)

$$w(r)=C_1J_0(\lambda r)+C_2Y_0(\lambda r).$$

Так как при $r\to 0$ $Y_0(\lambda r)\to\infty$, то из условия конечности температуры на оси цилиндра следует, что $C_2=0$. Что же касается параметра $\lambda$, то он находится из граничного условия (66), и очевидно, что этот параметр может принимать бесчисленное множество значений, определяемых по формуле

$$\lambda_n=\frac{\mu_n}{R}, \tag{71}$$

где $\mu_n$ — положительные корни уравнения

$$J_0(\mu)=0. \tag{72}$$

Каждому собственному значению $\lambda_n^2$ будет соответствовать собственная функция

$$w(r)=J_0\left(\frac{\mu_n r}{R}\right). \tag{73}$$

Принимая теперь во внимание уравнение (69) и (68), мы найдем, что функции

$$u_n(r, t)=a_ne^{-\left(\frac{a\mu_n}{R}\right)^2t}J_0\left(\frac{\mu_n r}{R}\right) \tag{74}$$

удовлетворяют уравнению (65) и граничному условию (66) при любых $a_n$.

Составим ряд

$$u(r, t)=\sum_{n=1}^{\infty}a_nJ_0\left(\frac{\mu_n r}{R}\right)e^{-\left(\frac{a\mu_n}{R}\right)^2t} \tag{75}$$

и, чтобы удовлетворить начальному условию (67), потребуем выполнения равенства

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n J_0\left(\frac{\mu_n r}{R}\right) = \varphi(r). \tag{76}$$

Написанный ряд представляет разложение заданной функции $\varphi(r)$ по функциям Бесселя в интервале $(0, R)$. Коэффициенты разложения (76) (см. гл. XIII, § 4) определяются по формуле

$$a_n = \frac{2}{R^2 J_1^2(\mu_n)} \int_0^R \rho\varphi(\rho) J_0\left(\frac{\mu_n \rho}{R}\right) d\rho. \tag{77}$$

Подставляя выражение (77) для $a_n$ в ряд (75), получим решение задачи (65)—(67) в виде

$$u(r, t) = \frac{2}{R^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0\left(\frac{\mu_n r}{R}\right)}{J_1^2(\mu_n)} e^{-\left(\frac{a\mu_n}{R}\right)^2 t} \int_0^R \rho\varphi(\rho) J_0\left(\frac{\mu_n \rho}{R}\right) d\rho. \tag{78}$$

2. Рассмотрим теперь тот случай, когда на поверхности цилиндра происходит *теплообмен с окружающей средой*, температура которой принимается равной нулю. Очевидно, что задача приводится к интегрированию уравнения (65) при начальном условии (67) и при граничном условии

$$\frac{\partial u}{\partial r} + hu \,\Big|_{r=R} = 0. \tag{79}$$

Повторив рассуждения п. 1, получим снова уравнения (69) и (70) и найдем:

$$w(r) = C_1 J_0(\lambda r).$$

Удовлетворяя граничному условию (79), найдем

$$\alpha J_0(\mu) + \mu J_0'(\mu) = 0, \tag{80}$$

где положено

$$\mu = \lambda R, \quad \alpha = hR. \tag{81}$$

В гл. XIII, § 3, было показано, что уравнение (80) имеет все корни вещественными.

Решение задачи ищем в виде ряда

$$u(r, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n J_0\left(\frac{\mu_n r}{R}\right) e^{-\left(\frac{\mu_n r}{R}\right)^2 t}, \tag{82}$$

где $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \ldots$ положительные корни уравнения (80) и каждый член ряда удовлетворяет граничному условию (79).

Удовлетворяя начальному условию (67), получим

$$\varphi(r)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n J_0\left(\frac{\mu_n r}{R}\right). \tag{83}$$

Но это есть не что иное, как частный случай разложения (44) гл. XIII, когда $\nu=0$, $\beta=1$, и, следовательно, коэффициенты $a_n$ определяются по формуле (45) той же главы, т. е.

$$a_n=\frac{2\mu_n^2}{R^2(\mu_n^2+\alpha^2)J_0^2(\mu_n)}\int_0^R r\varphi(r)J_0\left(\frac{\mu_n r}{R}\right)dr. \tag{84}$$

Подставляя это значение коэффициента $a_n$ в ряд (82), получим решение задачи в виде

$$u(r,t)=\frac{2}{R^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu_n^2\int\limits_0^R \rho\varphi(\rho)J_0\left(\frac{\mu_n\rho}{R}\right)d\rho}{(\mu_n^2+h^2R^2)J_0^2(\mu_n)}J_0\left(\frac{\mu_n r}{R}\right)e^{-\left(\frac{\mu_n r}{R}\right)^2 t}. \tag{85}$$

## § 4. Распространение тепла в цилиндре конечных размеров

Рассмотрим задачу о распространении тепла в круговом цилиндре радиуса $R$ и высоты $2h$, начальная температура которого равна $\varphi(r,\theta,z)$, а поверхность и основания поддерживаются при температуре, равной нулю.

Задача, таким образом, сводится к решению уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) \tag{86}$$

при граничных условиях

$$u|_{z=-h}=u|_{z=h}=0, \quad u|_{r=R}=0 \tag{87}$$

и при начальном условии

$$u|_{t=0}=\varphi(r,\theta,z). \tag{88}$$

Применяя метод Фурье и определяя постоянные, вводимые этим методом, через граничные условия, мы получим следующие частные решения уравнения (86):

$$e^{-a^2\left(\lambda^2+\frac{m^2\pi^2}{4h^2}\right)t}J_n(\lambda r)\sin\frac{m\pi}{2h}(z+h)(A\cos n\theta+B\sin n\theta). \tag{89}$$

Здесь через $m$ обозначены целые положительные числа, как это требует второе из граничных условий (87). Постоянная $\lambda$ свя-