Удовлетворяя начальному условию (67), получим

$$\varphi(r)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n J_0\left(\frac{\mu_n r}{R}\right). \tag{83}$$

Но это есть не что иное, как частный случай разложения (44) гл. XIII, когда $\nu=0$, $\beta=1$, и, следовательно, коэффициенты a_n определяются по формуле (45) той же главы, т. е.

$$a_n=\frac{2\mu_n^2}{R^2(\mu_n^2+\alpha^2)J_0^2(\mu_n)}\int_0^R r\varphi(r)J_0\left(\frac{\mu_n r}{R}\right)dr. \tag{84}$$

Подставляя это значение коэффициента a_n в ряд (82), получим решение задачи в виде

$$u(r,t)=\frac{2}{R^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu_n^2\int_0^R \rho\varphi(\rho)J_0\left(\frac{\mu_n\rho}{R}\right)d\rho}{(\mu_n^2+h^2R^2)J_0^2(\mu_n)}J_0\left(\frac{\mu_n r}{R}\right)e^{-\left(\frac{\mu_n r}{R}\right)^2 t}. \tag{85}$$

§ 4. Распространение тепла в цилиндре конечных размеров

Рассмотрим задачу о распространении тепла в круговом цилиндре радиуса R и высоты $2h$, начальная температура которого равна $\varphi(r, \theta, z)$, а поверхность и основания поддерживаются при температуре, равной нулю.

Задача, таким образом, сводится к решению уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) \tag{86}$$

при граничных условиях

$$u|_{z=-h}=u|_{z=h}=0, \quad u|_{r=R}=0 \tag{87}$$

и при начальном условии

$$u|_{t=0}=\varphi(r, \theta, z). \tag{88}$$

Применяя метод Фурье и определяя постоянные, вводимые этим методом, через граничные условия, мы получим следующие частные решения уравнения (86):

$$e^{-a^2\left(\lambda^2+\frac{m^2\pi^2}{4h^2}\right)t} J_n(\lambda r)\sin\frac{m\pi}{2h}(z+h)(A\cos n\theta+B\sin n\theta). \tag{89}$$

Здесь через m обозначены целые положительные числа, как это требует второе из граничных условий (87). Постоянная λ связана с корнями уравнения

$$J_n(\mu)=0 \tag{90}$$

равенством

$$\lambda=\frac{\mu}{R}. \tag{91}$$

Это требование третьего из граничных условий (87). Что касается числа n, то оно должно быть целым, так как температура цилиндра есть периодическая функция угла θ с периодом, равным 2π.

Взяв теперь сумму всех решений вида (89), распространенную по всем $n=0, 1, 2, 3, \ldots, m=1, 2, 3, \ldots$ и по всем положительным корням $\mu_{n1}, \mu_{n2}, \mu_{n3}, \ldots$ уравнения (90), получим решение задачи в виде ряда:

$$u=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} e^{-a^2\left(\frac{\mu_{nk}^2}{R^2}+\frac{m^2\pi^2}{4h^2}\right)t} J_n\left(\frac{\mu_{nk}r}{R}\right)\times$$

$$\times\left[\sin\frac{m\pi}{2h}(z+h)\right](A_{kmn}\cos n\theta+B_{kmn}\sin n\theta), \tag{92}$$

в котором остается еще определить коэффициенты A_{kmn} и B_{kmn}. Положим с этой целью в разложении (92) $t=0$; тогда, принимая во внимание начальное условие (88), получим

$$\varphi(r, \theta, z)=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} J_n\left(\frac{\mu_{nk}r}{R}\right)\sin\frac{m\pi}{2h}(z+h)\times$$

$$\times(A_{kmn}\cos n\theta+B_{kmn}\sin n\theta). \tag{93}$$

Так как правая часть равенства (93) представляет собой разложение функции $\varphi(r, \theta, z)$ в ряд Фурье по $\cos n\theta$ и $\sin n\theta$, то коэффициенты при этих тригонометрических функциях определяются по известным формулам. Таким образом, мы будем иметь:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(r, \theta, z)\,d\theta=\sum_{k=1}^{\infty}\left[\sum_{m=1}^{\infty}A_{km0}\sin\frac{m\pi}{2h}(z+h)\right]J_0\left(\frac{\mu_{0k}r}{R}\right),$$

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(r, \theta, z)\cos n\theta\,d\theta=\sum_{k=1}^{\infty}\left[\sum_{m=1}^{\infty}A_{kmn}\sin\frac{m\pi}{2h}(z+h)\right]J_n\left(\frac{\mu_{nk}r}{R}\right),$$

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(r, \theta, z)\sin n\theta\,d\theta=\sum_{k=1}^{\infty}\left[\sum_{m=1}^{\infty}B_{kmn}\sin\frac{m\pi}{2h}(z+h)\right]J_n\left(\frac{\mu_{nk}r}{R}\right).$$

Каждое из этих равенств представляет собой разложение функции, рассматриваемой как функция от r, в ряд по функциям Бесселя. Мы знаем, что коэффициенты таких разложений определяются по формуле (43) гл. XIII, § 5, откуда получается, что

$$\sum_{m=1}^{\infty} A_{km0} \sin \frac{m\pi}{2h}(z+h) = \frac{1}{\pi R^2 J_1^2(\mu_{0k})} \int_0^R \int_0^{2\pi} r\varphi(r, \theta, z) J_0\left(\frac{\mu_{0k} r}{R}\right) dr\, d\theta, \quad (94)$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} A_{kmn} \sin \frac{m\pi}{2h}(z+h) = \frac{2}{\pi R^2 J_{n+1}^2(\mu_{nk})} \int_0^R \int_0^{2\pi} r\varphi(r, \theta, z) J_n\left(\frac{\mu_{nk} r}{R}\right) \cos n\theta\, dr\, d\theta, \quad (95)$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} B_{kmn} \sin \frac{m\pi}{2h}(z+h) = \frac{2}{\pi R^2 J_{n+1}^2(\mu_{nk})} \int_0^R \int_0^{2\pi} r\varphi(r, \theta, z) J_n\left(\frac{\mu_{nk} r}{R}\right) \sin n\theta\, dr\, d\theta. \quad (96)$$

Так как функции $\sin \frac{m\pi}{2h}(z+h)$ $(m=1, 2, 3, \ldots)$ образуют ортогональную систему функций на отрезке $[-h, h]$, то обычным приемом находим, что в разложениях (94), (95) и (96) коэффициенты A_{kmn}, B_{kmn} определяются формулами:

$$A_{km0} = \frac{1}{\pi h R^2 J_1^2(\mu_{0k})} \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_{-h}^{h} r\varphi(r, \theta, z) J_0\left(\frac{\mu_{0k} r}{R}\right) \sin \frac{m\pi}{2h}(z+h)\, dr\, d\theta\, dz,$$

$$A_{kmn} = \frac{2}{\pi h R^2 J_{n+1}^2(\mu_{nk})} \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_{-h}^{h} r\varphi(r, \theta, z) J_n\left(\frac{\mu_{nk} r}{R}\right) \cos n\theta \times \sin \frac{m\pi}{2h}(z+h)\, dr\, d\theta\, dz,$$

$$B_{kmn} = \frac{2}{\pi h R^2 J_{n+1}^2(\mu_{nk})} \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_{-h}^{h} r\varphi(r, \theta, z) J_n\left(\frac{\mu_{nk} r}{R}\right) \sin n\theta \times \sin \frac{m\pi}{2h}(z+h)\, dr\, d\theta\, dz.$$

Подставляя эти значения коэффициентов в ряд (92), получим окончательное решение задачи (86)—(88).

§ 5. Распространение тепла в однородном шаре

Исследуем задачу о распространении тепла в однородном шаре радиуса R, центр которого находится в начале координат.

1. Рассмотрим сначала тот случай, когда начальная температура шара равна $\varphi(r)$, а температура его поверхности равна $\psi(t)$. В этом случае задача приводится к интегрированию урав-