деляются по формуле (43) гл. XIII, § 5, откуда получается, что

$$\sum_{m=1}^{\infty} A_{km0} \sin \frac{m\pi}{2h}(z+h) = \frac{1}{\pi R^2 J_1^2(\mu_{0k})} \int_0^R \int_0^{2\pi} r\varphi(r, \theta, z) J_0\left(\frac{\mu_{0k} r}{R}\right) dr\, d\theta, \quad (94)$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} A_{kmn} \sin \frac{m\pi}{2h}(z+h) = \\ = \frac{2}{\pi R^2 J_{n+1}^2(\mu_{nk})} \int_0^R \int_0^{2\pi} r\varphi(r, \theta, z) J_n\left(\frac{\mu_{nk} r}{R}\right) \cos n\theta\, dr\, d\theta, \quad (95)$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} B_{kmn} \sin \frac{m\pi}{2h}(z+h) = \\ = \frac{2}{\pi R^2 J_{n+1}^2(\mu_{nk})} \int_0^R \int_0^{2\pi} r\varphi(r, \theta, z) J_n\left(\frac{\mu_{nk} r}{R}\right) \sin n\theta\, dr\, d\theta. \quad (96)$$

Так как функции $\sin \frac{m\pi}{2h}(z+h)$ $(m = 1, 2, 3, \ldots)$ образуют ортогональную систему функций на отрезке $[-h, h]$, то обычным приемом находим, что в разложениях (94), (95) и (96) коэффициенты A_{kmn}, B_{kmn} определяются формулами:

$$A_{km0} = \frac{1}{\pi h R^2 J_1^2(\mu_{0k})} \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_{-h}^{h} r\varphi(r, \theta, z) J_0\left(\frac{\mu_{0k} r}{R}\right) \sin \frac{m\pi}{2h}(z+h)\, dr\, d\theta\, dz,$$

$$A_{kmn} = \frac{2}{\pi h R^2 J_{n+1}^2(\mu_{nk})} \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_{-h}^{h} r\varphi(r, \theta, z) J_n\left(\frac{\mu_{nk} r}{R}\right) \cos n\theta \times \\ \times \sin \frac{m\pi}{2h}(z+h)\, dr\, d\theta\, dz,$$

$$B_{kmn} = \frac{2}{\pi h R^2 J_{n+1}^2(\mu_{nk})} \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_{-h}^{h} r\varphi(r, \theta, z) J_n\left(\frac{\mu_{nk} r}{R}\right) \sin n\theta \times \\ \times \sin \frac{m\pi}{2h}(z+h)\, dr\, d\theta\, dz.$$

Подставляя эти значения коэффициентов в ряд (92), получим окончательное решение задачи (86)—(88).

§ 5. Распространение тепла в однородном шаре

Исследуем задачу о распространении тепла в однородном шаре радиуса R, центр которого находится в начале координат.

1. Рассмотрим сначала тот случай, когда начальная температура шара равна $\varphi(r)$, а температура его поверхности равна $\psi(t)$. В этом случае задача приводится к интегрированию урав-

нения теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial u}{\partial r}\right) \tag{97}$$

при граничном условии

$$u\,|_{r=R}=\psi(t) \tag{98}$$

и при начальном условии

$$u\,|_{t=0}=\varphi(r). \tag{99}$$

Полагая $v=ru$, имеем:

$$\frac{\partial v}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 v}{\partial r^2}, \tag{100}$$

$$v\,|_{r=0}=0, \qquad v\,|_{r=R}=R\psi(t), \tag{101}$$

$$v\,|_{t=0}=r\varphi(r) \tag{102}$$

Задача (97)—(99) приводится, таким образом, к задаче распространения тепла в стержне, концы которого поддерживаются при температурах 0 и $R\psi(t)$ соответственно. Решение этой задачи приведено в § 1 [см. (18), (23) и (24)]. Используя его, окончательно получим:

$$u(r,\ t)=\frac{2}{Rr}\sum_{n=1}^{\infty}e^{-\left(\frac{n\pi a}{R}\right)^2 t}\sin\frac{n\pi r}{R}\times$$

$$\times\left\{\int_0^R\rho\varphi(\rho)\sin\frac{n\pi\rho}{R}\,d\rho-(-1)^n\pi a^2 n\int_0^t e^{-\left(\frac{n\pi a}{R}\right)^2\tau}\psi(\tau)\,d\tau\right\}. \tag{103}$$

Частные случаи: а) Начальная температура равна нулю. Температура поверхности шара постоянна и равна u_0.

$$u(r,\ t)=u_0+\frac{2Ru_0}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\sin\frac{n\pi r}{R}e^{-\left(\frac{n\pi a}{R}\right)^2 t}.$$

б) Начальная температура равна нулю. Температура поверхности шара равна kt, $k=\text{const}$.

$$u=k\left(t-\frac{R^2-r^2}{6a^2}\right)-\frac{2kR^3}{a^2\pi^3 r}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^3}\sin\frac{n\pi r}{R}e^{-\left(\frac{n\pi a}{R}\right)^2 t}.$$

2. На поверхности шара происходит теплообмен с окружающей средой, температуру которой будем считать равной нулю. Эта задача приводится к решению уравнения (97) при начальном условии (99) и при граничном условии

$$\frac{\partial u}{\partial r}+hu\,|_{r=R}=0. \tag{104}$$

Как и в п. 1, сделаем подстановку $v = ur$. Тогда будем иметь

$$\frac{\partial v}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial r^2}, \tag{105}$$

$$v|_{r=0} = 0, \ \frac{\partial v}{\partial r} + \left(h - \frac{1}{R}\right) v \Big|_{r=R} = 0, \tag{106}$$

$$v|_{t=0} = r\varphi(r). \tag{107}$$

Таким образом, задача (97), (99) и (104) приводится к задаче распространения тепла в стержне, один конец которого поддерживается при нулевой температуре, а на другом конце происходит теплообмен с окружающей средой.

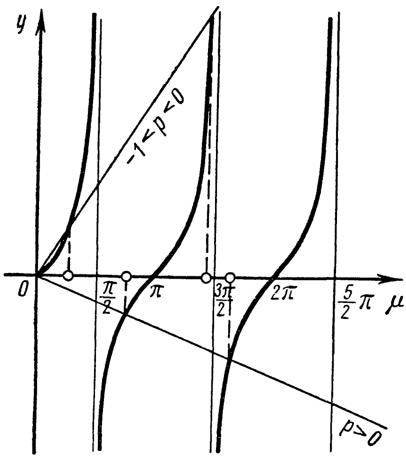

Рис. 49

Применяя метод Фурье, мы найдем частные решения уравнения (105)

$$v = Ce^{-\lambda a^2 t} \sin \lambda r, \tag{108}$$

удовлетворяющие граничным условиям (106) при любом C, если λ является корнем уравнения

$$\lambda R \cos \lambda R + (hR - 1) \sin \lambda R = 0. \tag{109}$$

Положим

$$\lambda R = \mu, \ p = hR - 1 > -1, \tag{110}$$

тогда уравнение (109) примет вид

$$\mu \cos \mu + p \sin \mu = 0. \tag{111}$$

Это уравнение имеет бесчисленное множество вещественных корней, в чем нетрудно убедиться, построив графики кривых (рис. 49)

$$y = \operatorname{tg} \mu, \ y = -\frac{\mu}{p}.$$

Из чертежа видно, что когда $-1 < p < 0$, то в каждом из интервалов $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, $\left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$, ... лежит положительный корень уравнения (111), причем при возрастании n значения корней приближаются к $(2n-1)\frac{\pi}{2}$. Когда $0 < p < \infty$, положительные корни лежат в интервалах $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$, $\left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$, ... и при возрастании n приближаются к $(2n-1)\frac{\pi}{2}$. Отметим, что отрицательные корни уравнения (111) по абсолютной величине равны положительным.

Обозначим через $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \ldots$ положительные корни уравнения (111). Тогда, согласно (110), собственные значения будут

$$\lambda_n^2 = \left(\frac{\mu_n}{R}\right)^2 \quad (n = 1, 2, 3, \ldots). \tag{112}$$

Каждому собственному значению соответствует собственная функция

$$w_n(r) = \sin\frac{\mu_n r}{R}. \tag{113}$$

Составим теперь ряд

$$v(r, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\left(\frac{\mu_n a}{R}\right)^2 t} \sin\frac{\mu_n r}{R}. \tag{114}$$

Удовлетворяя начальному условию (107), получим

$$r\varphi(r) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\frac{\mu_n r}{R}. \tag{115}$$

Умножая обе части разложения (115) на $\sin\frac{\mu_k r}{R}$ и интегрируя в пределах от 0 до R, найдем, в силу равенств

$$\int_0^R \sin\frac{\mu_n r}{R} \sin\frac{\mu_k r}{R}\,dr = \begin{cases} 0 \text{ при } k \neq n, \\ \dfrac{R}{2}\,\dfrac{p(p+1)+\mu_n^2}{p^2+\mu_n^2} \text{ при } k = n, \end{cases}$$

коэффициенты a_n по следующей формуле:

$$a_n = \frac{2}{R}\,\frac{p^2+\mu_n^2}{p(p+1)+\mu_n^2} \int_0^R r\varphi(r) \sin\frac{\mu_n r}{R}\,dr.$$

Внося это выражение коэффициентов a_n в ряд (114) и принимая во внимание, что $v = ru$, получим решение задачи (97), (99) и (104) в виде ряда

$$u(r, t) = \frac{2}{Rr} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p^2+\mu_n^2}{p(p+1)+\mu_n^2} e^{-\left(\frac{\mu_n a}{R}\right)^2 t} \sin\frac{\mu_n r}{R} \int_0^R \rho\varphi(\rho) \sin\frac{\mu_n \rho}{R}\,d\rho. \tag{116}$$

3. Обратимся теперь к исследованию общего случая, когда температура шара зависит от всех трех координат r, θ и φ; при этом мы будем предполагать, что температура поверхности шара равна нулю.

Если преобразовать уравнение теплопроводности к сферическим координатам r, θ и φ, то задача о распространении тепла в шаре приводится к интегрированию уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \left[\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\,\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\,\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\,\frac{\partial u}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta}\,\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}\right] \tag{117}$$

при условиях

$$u|_{r=R}=0, \tag{118}$$

$$u|_{t=0}=f(r,\ \theta,\ \varphi). \tag{119}$$

Ищем частные решения уравнения (117) в виде

$$u=T(t)\,v(r,\ \theta,\ \varphi,). \tag{120}$$

Подставляя это в (117), получаем

$$\frac{\Delta v}{v}=\frac{T'(t)}{a^2T(t)}=-k^2,$$

откуда имеем два уравнения:

$$T'(t)+a^2k^2T(t)=0, \tag{121}$$

$$\Delta v+k^2v=0, \tag{122}$$

где

$$\Delta v=\frac{\partial^2 v}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial v}{\partial r}+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial v}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 v}{\partial\varphi^2}.$$

Чтобы получить нетривиальные решения уравнения (117) вида (120), удовлетворяющие граничному условию (118), необходимо найти нетривиальные решения уравнения (122), удовлетворяющие граничному условию

$$v|_{r=R}=0. \tag{123}$$

Решение уравнения (122), удовлетворяющее граничному условию (123), будем искать в виде

$$v=\Phi(r)\,Y(\theta,\ \varphi). \tag{124}$$

Подставляя в уравнение (122) и разделяя переменные, получим

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y}{\partial\varphi^2}+\lambda Y=0, \tag{125}$$

$$\frac{d^2\Phi(r)}{dr^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial\Phi(r)}{dr}+\left(k^2-\frac{\lambda}{r^2}\right)\Phi(r)=0. \tag{126}$$

Решая уравнение (125) при условии ограниченности на всей поверхности сферы, получаем собственные значения

$$\lambda=n(n+1), \tag{127}$$

которым соответствуют сферические функции (см. гл. XXI, § 1)

$$P_n(\cos\theta),\ P_{nm}(\cos\theta)\cos m\varphi,\ P_{nm}(\cos\theta)\sin m\varphi\ (m=1,2,\ldots,n). \tag{128}$$

Рассмотрим теперь уравнение (126). Учитывая равенство (127), граничное условие (123), а также ограниченность решения при $r=0$, получим для функции $\Phi(r)$ следующую граничную задачу:

$$\frac{d^2\Phi(r)}{dr^2}+\frac{2}{r}\frac{d\Phi(r)}{dr}+\left(k^2-\frac{n(n+1)}{r^2}\right)\Phi(r)=0, \tag{129}$$

$$\Phi(0)<\infty,\ \ \Phi|_{r=R}=0. \tag{130}$$

С помощью подстановки

$$\Phi(r)=\frac{y(r)}{\sqrt{r}} \tag{131}$$

уравнение (129) приводится к уравнению Бесселя

$$r^2y''+ry'+\left[k^2r^2-\left(n+\frac{1}{2}\right)^2\right]y=0,$$

общее решение которого имеет вид (гл. XIII, § 1)

$$y=AJ_{n+\frac{1}{2}}(kr)+BY_{n+\frac{1}{2}}(kr). \tag{132}$$

Из условия ограниченности решения следует, что $B=0$. Граничное условие (130) дает

$$AJ_{n+\frac{1}{2}}(kR)=0.$$

Так как мы ищем нетривиальные решения уравнения (129), то $A\neq 0$ и, следовательно,

$$J_{n+\frac{1}{2}}(kR)=0.$$

Обозначив через μ_{n1}, μ_{n2}, μ_{n3}, ... положительные корни трансцендентного уравнения

$$J_{n+\frac{1}{2}}(\mu)=0, \tag{133}$$

находим собственные значения

$$k_{mn}^2=\left(\frac{\mu_{nm}}{R}\right)^2, \quad \left(\begin{matrix} m=1,\ 2,\ 3,\ \dots \\ n=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \dots\end{matrix}\right). \tag{134}$$

Каждому собственному значению k_{mn}^2 граничной задачи (122)—(123) соответствует $(2n+1)$ собственных функций

$$v_{mnj}(r,\ \theta,\ \varphi)=\frac{J_{n+\frac{1}{2}}\left(\frac{\mu_{mn}r}{R}\right)}{\sqrt{r}}Y_n^{(j)}(\theta,\ \varphi) \tag{135}$$

$$(j=-n,\ \dots,\ -1,\ 0,\ 1,\ \dots,\ n),$$

где положено

$$Y_n^{\nu}(\theta,\ \varphi)=P_{n\nu}(\cos\theta)\cos\nu\varphi, \quad Y_n^{(-\nu)}(\theta,\ \varphi)=P_{n\nu}(\cos\theta)\sin\nu\varphi,$$
$$(\nu=0,\ 1,\ 2,\ \dots,\ n).$$

При $k=k_{mn}$ общее решение уравнения (121) имеет вид

$$T_{mn}(t)=A_{mn}e^{-\left(\frac{a\mu_{nm}}{R}\right)^2 t}, \tag{136}$$

где A_{mn} — произвольная постоянная.

Таким образом, в силу (120), (135) и (136), все функции вида

$$u_{mn}(r, \theta, \varphi, t) = \frac{J_{n+\frac{1}{2}}\left(\frac{\mu_{nm} r}{R}\right) Y_n(\theta, \varphi)}{\sqrt{r}} e^{-\left(\frac{a\mu_{nm}}{R}\right)^2 t}, \tag{137}$$

где

$$Y_n(\theta, \varphi) = a_{0m} P_n(\cos\theta) + \sum_{k=1}^{n} (a_{km} \cos k\varphi + b_{km} \sin k\varphi) P_{nk}(\cos\theta) \tag{138}$$

— сферическая функция порядка n, удовлетворяют уравнению (117) и граничному условию (118) при любых постоянных a_{0m}, a_{km} и b_{km}.

Составим теперь ряд

$$u(r, \theta, \varphi, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{e^{-\left(\frac{a\mu_{nm}}{R}\right)^2 t}}{\sqrt{r}} Y_n(\theta, \varphi) J_{n+\frac{1}{2}}\left(\frac{\mu_{nm} r}{R}\right). \tag{139}$$

Требуя выполнения начального условия (119), получим

$$f(r, \theta, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{Y_n(\theta, \varphi)}{\sqrt{r}} J_{n+\frac{1}{2}}\left(\frac{\mu_{nm} r}{R}\right). \tag{140}$$

Чтобы найти сферические функции $Y_n(\theta, \varphi)$ в разложении (140), умножим обе части этого разложения на $P_k(\cos\gamma)$ и проинтегрируем по поверхности сферы единичного радиуса. Тогда получим

$$\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} f(r, \theta', \varphi') P_k(\cos\gamma)\, d\sigma = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{J_{n+\frac{1}{2}}\left(\frac{\mu_{nm} r}{R}\right)}{\sqrt{r}} \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} Y_n(\theta', \varphi') P_k(\cos\gamma)\, d\sigma. \tag{141}$$

Принимая во внимание формулы (23) гл. XXI

$$\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} Y_n(\theta', \varphi') P_k(\cos\gamma)\, d\sigma = \begin{cases} 0 \text{ при } k \neq n, \\ \frac{4\pi}{2n+1} Y_n(\theta, \varphi) \text{ при } k = n, \end{cases}$$

мы можем выражение (141) переписать в виде

$$\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} f(r, \theta', \varphi') P_n(\cos\gamma)\, d\sigma = \frac{4\pi}{2n+1} \sum_{m=1}^{\infty} Y_n(\theta, \varphi) \frac{J_{n+\frac{1}{2}}\left(\frac{\mu_{nm} r}{R}\right)}{\sqrt{r}}$$

или

$$\frac{(2n+1)\sqrt{r}}{4\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} f(r,\ \theta',\ \varphi')\, P_n(\cos\gamma)\, d\sigma = \sum_{m=1}^{\infty} Y_n(\theta,\ \varphi)\, J_{n+\frac{1}{2}}\left(\frac{\mu_{nm} r}{R}\right). \tag{142}$$

Сравним это разложение с разложением произвольной функции $F(r)$ в ряд по функциям Бесселя (см. гл. XIII, § 4):

$$F(r) = \sum_{m=1}^{\infty} a_m J_{n+\frac{1}{2}}\left(\frac{\mu_{nm} r}{R}\right), \tag{143}$$

где

$$a_m = \frac{2}{R^2 J^2_{n+3/2}(\mu_{nm})}\int_0^R r F(r)\, J_{n+\frac{1}{2}}\left(\frac{\mu_{nm} r}{R}\right),$$

а μ_{nm} — положительные корни уравнения (133).

Из сравнений рядов (142) и (143) находим искомое выражение для сферических функций $Y_n(\theta,\ \varphi)$, а именно:

$$Y_n(\theta, \varphi) = \frac{2n+1}{2\pi R^2 J^2_{n+3/2}(\mu_{nm})}\int_0^R\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} r^{3/2} f(r, \theta', \varphi')\, P_n(\cos\gamma)\, J_{n+\frac{1}{2}}\left(\frac{\mu_{nm} r}{R}\right) d\sigma\, dr. \tag{144}$$

Таким образом, решением задачи (117)—(119) будет ряд (139), в котором сферические функции $Y_n(\theta,\ \varphi)$ определяются по формуле (144).

§ 6. Распространение тепла в прямоугольной пластинке

Рассмотрим тонкую однородную прямоугольную пластинку, контур которой поддерживается при температуре 0° С. Начальное распределение температуры задано, и задача заключается в определении температуры пластинки в любой момент времени $t > 0$ в предположении, что тепловой обмен между боковой поверхностью пластинки с окружающей средой отсутствует.

Очевидно, эта задача приводится к решению уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) \tag{145}$$

при граничных условиях

$$\begin{aligned} u|_{x=0} &= u|_{x=p} = 0, \\ u|_{y=0} &= u|_{y=q} = 0 \end{aligned} \tag{146}$$

и при начальном условии

$$u|_{t=0} = \varphi(x,\ y). \tag{147}$$