или

$$\frac{(2n+1)\sqrt{r}}{4\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} f(r,\ \theta',\ \varphi')\,P_n(\cos\gamma)\,d\sigma=\sum_{m=1}^{\infty} Y_n(\theta,\ \varphi)\,J_{n+\frac{1}{2}}\left(\frac{\mu_{nm}r}{R}\right). \tag{142}$$

Сравним это разложение с разложением произвольной функции $F(r)$ в ряд по функциям Бесселя (см. гл. XIII, § 4):

$$F(r)=\sum_{m=1}^{\infty} a_m\,J_{n+\frac{1}{2}}\left(\frac{\mu_{nm}r}{R}\right), \tag{143}$$

где

$$a_m=\frac{2}{R^2 J^2_{n+3/2}(\mu_{nm})}\int_0^R rF(r)\,J_{n+\frac{1}{2}}\left(\frac{\mu_{nm}r}{R}\right),$$

а μ_{nm} — положительные корни уравнения (133).

Из сравнений рядов (142) и (143) находим искомое выражение для сферических функций $Y_n(\theta,\ \varphi)$, а именно:

$$Y_n(\theta,\varphi)=\frac{2n+1}{2\pi R^2 J^2_{n+3/2}(\mu_{nm})}\int_0^R\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} r^{3/2} f(r,\theta',\varphi')\,P_n(\cos\gamma)\,J_{n+\frac{1}{2}}\left(\frac{\mu_{nm}r}{R}\right)d\sigma\,dr. \tag{144}$$

Таким образом, решением задачи (117)—(119) будет ряд (139), в котором сферические функции $Y_n(\theta,\ \varphi)$ определяются по формуле (144).

§ 6. Распространение тепла в прямоугольной пластинке

Рассмотрим тонкую однородную прямоугольную пластинку, контур которой поддерживается при температуре 0° С. Начальное распределение температуры задано, и задача заключается в определении температуры пластинки в любой момент времени $t>0$ в предположении, что тепловой обмен между боковой поверхностью пластинки с окружающей средой отсутствует.

Очевидно, эта задача приводится к решению уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) \tag{145}$$

при граничных условиях

$$\begin{gathered} u\,|_{x=0}=u\,|_{x=p}=0, \\ u\,|_{y=0}=u\,|_{y=q}=0 \end{gathered} \tag{146}$$

и при начальном условии

$$u\,|_{t=0}=\varphi(x,\ y). \tag{147}$$

Согласно методу Фурье, будем искать частные решения уравнения (145) в виде произведения

$$u = T(t)\,X(x)\,Y(y);$$

тогда для определения функций $X(x)$, $Y(y)$ и $T(t)$ получим следующие уравнения:

$$X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0, \quad Y''(y) + \mu^2 Y(y) = 0,$$
$$T'(t) + a^2(\lambda^2 + \mu^2)\,T(t) = 0,$$

где λ^2 и μ^2 — постоянные.

Общие решения этих уравнений имеют вид:

$$X(x) = C_1 \cos \lambda x + C_2 \sin \lambda x, \quad Y(y) = C_3 \cos \mu x + C_4 \sin \mu x,$$
$$T(t) = Ae^{-a^2(\lambda^2+\mu^2)\,t}.$$

Для выполнения граничных условий (146) следует положить

$$C_1 = 0,\ C_3 = 0,\ \lambda = \frac{m\pi}{p},\ \mu = \frac{n\pi}{q} \quad (m,\ n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots).$$

Таким образом, частными решениями уравнения (145), удовлетворяющими граничным условиям (146), будут

$$u_{nm} = A_{mn} e^{-a^2\pi^2\left(\frac{m^2}{p^2}+\frac{n^2}{q^2}\right)t} \sin \frac{m\pi}{p} x \sin \frac{n\pi}{q} y.$$

Составим ряд

$$u(x,\ y,\ t) = \sum_{m,\ n=1}^{\infty} A_{mn} e^{-a^2\pi^2\left(\frac{m^2}{p^2}+\frac{n^2}{q^2}\right)t} \sin \frac{m\pi}{p} x \sin \frac{n\pi}{q} y. \qquad (148)$$

Требуя выполнения начального условия (147), получим

$$\varphi(x,\ y) = \sum_{m,\ n=1}^{\infty} A_{mn} \sin \frac{m\pi x}{p} \sin \frac{n\pi y}{q}.$$

Написанный ряд представляет собой разложение функции $\varphi(x,\ y)$ в двойной ряд Фурье, и коэффициенты A_{mn} определяются, как нетрудно видеть, по формуле

$$A_{mn} = \frac{4}{pq} \int_0^p \int_0^q \varphi(x,\ y) \sin \frac{m\pi}{p} x \sin \frac{n\pi}{q} y\, dx\, dy. \qquad (149)$$

Внося эти значения коэффициентов A_{mn} в ряд (148), получим решение задачи (145)—(147).

ЗАДАЧИ

1. Дана неограниченная пластина толщиной $2R$ при температуре 0° С. Пластина нагревается с обеих сторон одинаково постоянным тепловым потоком q. Найти распределение температуры по толщине пластины в любой момент времени $t > 0$.

Ответ:

$$u(x,\ t)=\frac{a^2q}{kR}\left(t-\frac{R^2-3x^2}{6a^2}\right)-\frac{2qR}{k\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}e^{-\left(\frac{n\pi a}{R}\right)^2 t}\cos\frac{n\pi x}{R},$$

где k — коэффициент внутренней теплопроводности.

Указание. Задача приводится к интегрированию уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

при условиях

$$k\frac{\partial u}{\partial x}+q\Big|_{x=-R}=0,\quad -k\frac{\partial u}{\partial x}+q\Big|_{x=R}=0,\quad \frac{\partial u(0,\ t)}{\partial x}=0,\quad u|_{t=0}=0.$$

2. Температура боковой поверхности неограниченного цилиндра радиуса R равна нулю; начальное распределение температуры в цилиндре выражается формулой

$$u|_{t=0}=f(r,\ \theta).$$

Доказать, что температура внутри цилиндра в момент времени $t>0$ выражается рядом:

$$u(r,\ \theta,\ t)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}(A_{mn}\cos n\theta+B_{mn}\sin n\theta)\,I_n\left(\frac{\mu_m r}{R}\right)e^{-\left(\frac{a\mu_m}{R}\right)^2 t},$$

где

$$A_{m0}=\frac{1}{\pi R^2 I_1^2(\mu_m)}\int_0^R\int_{-\pi}^{\pi} rf(r,\ \theta)\,I_0\left(\frac{\mu_m r}{R}\right)dr\,d\theta,$$

$$A_{mn}=\frac{2}{\pi R^2 I_{n+1}^2(\mu_m)}\int_0^R\int_{-\pi}^{\pi} rf(r,\ \theta)\,I_n\left(\frac{\mu_m r}{R}\right)\cos n\theta\,dr\,d\theta,$$

$$B_{mn}=\frac{2}{\pi R^2 I_{n+1}^2(\mu_m)}\int_0^R\int_{-\pi}^{\pi} rf(r,\ \theta)\,I_n\left(\frac{\mu_m r}{R}\right)\sin n\theta\,dr\,d\theta,$$

а $\mu_1,\ \mu_2,\ \mu_3,\ \ldots$ — положительные корни уравнения

$$I_n(\mu)=0.$$