Векторное поле **a** называют *потенциальным*, если существует дифференцируемое скалярное поле φ, такое, что $\mathbf{a} = -\operatorname{grad} \varphi$. Ввиду того, что $\operatorname{rot} \operatorname{grad} \varphi = 0$ потенциальное поле безвихревое. Обратное верно, если область, занятая полем, односвязна. Скаляр φ называют *скалярным потенциалом* поля $\mathbf{a} = -\operatorname{grad} \varphi$.

Векторное поле, дивергенция которого во всех точках равна нулю, называют *соленоидальным*. Всякое соленоидальное поле **a** может быть представлено в виде $\mathbf{a} = \operatorname{rot} \mathbf{A}$, где **A** — вектор, называемый *векторным потенциалом* поля **a**. Поскольку соленоидальное поле лишено источников, то его векторные линии либо замкнуты, либо имеют бесконечную длину.

Теорема Гельмгольца утверждает, что всякое однозначное и непрерывное во всем пространстве векторное поле представимо в виде

$$\mathbf{a} = -\operatorname{grad} \varphi + \operatorname{rot} \mathbf{A},$$

где φ — скалярное поле, а **A** — векторное поле, т. е. любое достаточно гладкое векторное поле может быть представлено как сумма потенциального и соленоидального полей. Функцию φ называют *скалярным потенциалом*, а вектор **A** — *векторным потенциалом*. Векторный потенциал **A** можно выбрать так, чтобы $\operatorname{div} \mathbf{A} = 0$. Так как $\operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi = \Delta\varphi$, $\operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{A} = 0$, то источники $\operatorname{div} \mathbf{a}$ векторного поля всегда выражаются через лапласиан $\Delta\varphi$ скалярного потенциала и не зависят от векторного потенциала.

§ 2. Уравнения Лоренца — Максвелла

Уравнения электромагнитного поля или *уравнения Лоренца — Максвелла* не могут быть выведены из других законов природы. По существу, они являются выражением одного из фундаментальных законов природы. Обоснованием опирающейся на них электромагнитной теории является ее согласие с опытом в необычайно обширной области применений, простирающейся от атома до вселенной.

Важно подчеркнуть, что уравнения Лоренца — Максвелла описывают истинное, а не макроскопическое* (усредненное) электромагнитное поле, тогда как уравнения, до сих пор встречавшиеся в этой книге, в их приложениях к физическим явлениям давали макроскопическое описание. Ниже будет совершен переход

---

* «Макроскопическое» всегда означает «усредненное по большому числу элементов микроструктуры вещества» (молекул, ячеек кристалла и т. п.). Физика сплошных сред оперирует только с макроскопическими величинами.

к уравнениям — они получили название *уравнений Максвелла*, — дающих макроскопическое описание электромагнитного поля.

Уравнения Лоренца — Максвелла:

$$\mathrm{rot}\ \mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}; \tag{1}$$

$$\mathrm{rot}\ \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}; \tag{2}$$

$$\mathrm{div}\ \mathbf{E} = 4\pi\rho, \tag{3}$$

$$\mathrm{div}\ \mathbf{H} = 0 \tag{4}$$

связывают электрическое поле $\mathbf{E}$ и магнитное поле $\mathbf{H}$ между собой, а также с плотностью электрического заряда ρ и вектором плотности электрического тока $\mathbf{j}$. Символ $\frac{\partial}{\partial t}$ означает дифференцирование по времени в данной точке пространства. Величина c — постоянная, численно равная скорости света в вакууме; она получила название *электродинамической постоянной*. Векторные линии электрического и магнитного полей называют *силовыми линиями*, соответственно *электрическими* и *магнитными*.

Уравнение (3) утверждает, что источниками электрического поля являются электрические заряды. Оно может быть выведено из закона Кулона. Уравнение (4) гласит, что магнитное поле не имеет источников. В соответствии со сказанным в предыдущем параграфе это значит, что число магнитных силовых линий, входящих в любой объем, равно числу линий, выходящих из него. Поэтому магнитные силовые линии не могут ни начинаться ни кончаться ни в одной точке поля и либо замкнуты, либо имеют бесконечную длину. Уравнение (1) представляет закон электромагнитной индукции Фарадея. Уравнение (2) обобщает закон Био и Савара, отличаясь от него наличием члена $\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$. Именно добавление к перечисленным выше электрическим законам этого члена, произведенное Максвеллом, оказывается кардинально важным для того, чтобы система (1)—(4) давала полное описание электромагнитного поля.

Из уравнений (1) и (2) следует, что причинами возникновения и изменения электромагнитного поля является не только существование электрических зарядов — источников электрического поля, но и движение зарядов, а также изменение во времени самого поля. Это делает возможным существование магнитного поля, хотя оно не имеет источников, а также существование *свободного* (без зарядов и токов) электромагнитного поля *.

Продифференцировав по времени t уравнение (3) и подставив значение $\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$ из (2), получим

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{j} = 0. \tag{5}$$

Это уравнение представляет *закон сохранения электрического заряда.* В самом деле, проинтегрировав (5) по произвольному объему V и применив формулу Остроградского — Гаусса, найдем, что

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint\limits_{V} \rho dV = - \iint\limits_{\mathcal{F} V} \mathbf{j} \cdot \mathbf{n}\, dS,$$

т. е. приращение количества электричества (заряда) в объеме за единицу времени равно направленному внутрь электрическому току (напомним, что $\mathbf{n}$ — вектор, направленный из объема наружу). Наоборот, уравнение (3) следует из уравнений (5) и (2) с точностью до константы интегрирования. В этом легко убедиться, проведя выкладку, обратную проведенной выше.

Взяв дивергенцию от обеих частей уравнения (1), найдем, что $\frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \mathbf{H} = 0$, откуда $\operatorname{div} \mathbf{H} = \mathrm{const}$. Сравнение этого результата с (4) показывает, что уравнение (4) определяет лишь константу интегрирования. Если, в частности, ищется электромагнитное поле по его значениям в начальный момент времени, то уравнение (4) должно быть принято во внимание лишь при формулировке начальных условий. Действительно, ввиду тождества $\operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{E} = 0$, уравнение (4) удовлетворяется и во все моменты времени, если оно удовлетворяется в начальный момент. Заметим, что это уравнение так же связано с законом сохранения магнитного заряда, который мог бы быть записан в форме, аналогичной (5), как уравнение (3) — с законом сохранения электрического заряда. То, что правая часть уравнения (4) равна нулю, по существу, выражает самостоятельный закон природы, который гласит, что магнитный заряд не только сохраняется, но и равен нулю.

Предположим теперь, что для системы (1)—(4) поставлена задача, содержащая начальные условия, т. е. электромагнитное

---

* Обратим еще раз внимание читателя на смысл, придаваемый термину «источник поля». Источниками поля являются только области поля, содержащие электрические заряды.

поле ищется по его значениям в начальный момент времени (при, возможно, других ограничительных условиях на границе, в бесконечно удаленной точке и т. п.). Если заменить уравнения (3) и (4) уравнением (5) и условием равенства нулю магнитных зарядов, то, как только что было показано, из этого будут следовать уравнения (3) и (4) с точностью до констант интегрирования, равенство которых нулю достаточно принять во внимание только в начальных условиях. Например, если $\operatorname{div} \mathbf{H} = 0$ в начальный момент времени, то ввиду $\frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \mathbf{H} = 0$, это равенство будет иметь место и в дальнейшем.

Таким образом, полная система уравнений электромагнитного поля, по существу, сводится лишь к уравнениям (1)—(2), поскольку уравнения (3)—(4) следуют из законов сохранения других форм вещества — зарядов, которые отнюдь не могут быть сведены к полям **E** и **H**. Законы сохранения зарядов (в частности, равенство нулю магнитного заряда), ограничивая возможности возникновения поля, накладывают ограничения лишь на возможные формы распределения поля в пространстве. Эти ограничения, естественно, имеющие место во все моменты времени, и должны быть учтены в начальных условиях, чем выражается требование, чтобы рассматриваемое поле принадлежало к числу полей, которые реально могли возникнуть в природе.

Система (1)—(2) представляет систему из шести уравнений для девяти компонент векторов **E**, **H** и **j**. Недостающие три уравнения суть уравнения движения электрических зарядов, определяющие, совместно с законами сохранения, поле **j** плотности электрического тока. Если поле **j** задано в функции времени, то число неизвестных равно числу уравнений электромагнитного поля (1)—(2).

Задачи для системы уравнений (1)—(2) с *заданными* токами, которые в этом случае называют *сторонними*, возникают в огромном числе проблем; например, при изучении поля, создаваемого токами в антеннах радиопередатчиков и радиолокаторов, при расчетах полей, создаваемых движениями вещества в туманностях и атмосферах звезд, и т. д.

Когда система токов не задана, ситуация значительно более сложна. Ее рассмотрению посвящен следующий параграф.

§ 3. Уравнения Максвелла

В предыдущем параграфе под **E** и **H** понимались истинные поля, как бы быстро они ни менялись во времени и пространстве. Если к уравнениям (1)—(2) присоединить уравнения движения истинных зарядов — электронов и ионов, то, очевидно,