поле ищется по его значениям в начальный момент времени (при, возможно, других ограничительных условиях на границе, в бесконечно удаленной точке и т. п.). Если заменить уравнения (3) и (4) уравнением (5) и условием равенства нулю магнитных зарядов, то, как только что было показано, из этого будут следовать уравнения (3) и (4) с точностью до констант интегрирования, равенство которых нулю достаточно принять во внимание только в начальных условиях. Например, если $\operatorname{div} \mathbf{H} = 0$ в начальный момент времени, то ввиду $\frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \mathbf{H} = 0$, это равенство будет иметь место и в дальнейшем.

Таким образом, полная система уравнений электромагнитного поля, по существу, сводится лишь к уравнениям (1)—(2), поскольку уравнения (3)—(4) следуют из законов сохранения других форм вещества — зарядов, которые отнюдь не могут быть сведены к полям **E** и **H**. Законы сохранения зарядов (в частности, равенство нулю магнитного заряда), ограничивая возможности возникновения поля, накладывают ограничения лишь на возможные формы распределения поля в пространстве. Эти ограничения, естественно, имеющие место во все моменты времени, и должны быть учтены в начальных условиях, чем выражается требование, чтобы рассматриваемое поле принадлежало к числу полей, которые реально могли возникнуть в природе.

Система (1)—(2) представляет систему из шести уравнений для девяти компонент векторов **E**, **H** и **j**. Недостающие три уравнения суть уравнения движения электрических зарядов, определяющие, совместно с законами сохранения, поле **j** плотности электрического тока. Если поле **j** задано в функции времени, то число неизвестных равно числу уравнений электромагнитного поля (1)—(2).

Задачи для системы уравнений (1)—(2) с *заданными* токами, которые в этом случае называют *сторонними*, возникают в огромном числе проблем; например, при изучении поля, создаваемого токами в антеннах радиопередатчиков и радиолокаторов, при расчетах полей, создаваемых движениями вещества в туманностях и атмосферах звезд, и т. д.

Когда система токов не задана, ситуация значительно более сложна. Ее рассмотрению посвящен следующий параграф.

§ 3. Уравнения Максвелла

В предыдущем параграфе под **E** и **H** понимались истинные поля, как бы быстро они ни менялись во времени и пространстве. Если к уравнениям (1)—(2) присоединить уравнения движения истинных зарядов — электронов и ионов, то, очевидно, о фактическом решении уравнений не может быть речи *. Поэтому возникает необходимость перехода от рассмотрения истинных к рассмотрению *макроскопических* полей и токов, т. е. полей и токов, усредненных по большому числу элементов микроструктуры вещества (молекул, ячеек кристалла и т. п.). Разумеется, этот подход к делу есть обычная процедура, которая ведет от физики микропроцессов к физике сплошных сред, оперирующей только с макроскопическими величинами.

Задача, таким образом, состоит в том, чтобы из уравнений (1)—(4) для истинного электромагнитного поля получить уравнения для макроскопического электромагнитного поля в среде.

Формальная замена величин, входящих в уравнения Лоренца — Максвелла, их средними значениями приводит к появлению в правых частях уравнений средних значений $\langle\rho\rangle$ и $\langle\mathbf{j}\rangle$ плотностей заряда и тока, которые не соответствуют никаким макроскопическим физическим величинам, поскольку, как будет видно из дальнейшего, они не могут быть непосредственно макроскопически измерены.

Это объясняется тем, что токи и электрические заряды, являющиеся элементами микроструктуры, в зависимости от их особенностей и характера взаимодействия с другими элементами микроструктуры и электромагнитным полем, формируются в различные макроскопические величины, т. е. проявляются в различных макроскопических свойствах тел.

В среде под воздействием электромагнитного поля возможны три основных процесса:

1. Перенос заряженных частиц. Макроскопическое проявление этого явления называют *конвективным электрическим током.* Заряженные частицы, могущие перемещаться на макроскопические расстояния, называют *свободными зарядами.*

2. *Смещение заряженных частиц разных знаков, входящих в один элемент структуры, в целом электрически нейтральный* (молекула, ячейка кристалла и т. п.). Электрическое поле, смещая связанные в единый элемент структуры разноименные частицы в разных направлениях, вызывает: а) деформацию этого элемента и появление (или изменение имевшегося) дипольного электрического момента, направленного вдоль поля, б) поворот элементов микроструктуры, обладающих дипольным моментом, в направлении, соответствующем ориентации дипольных моментов вдоль электрического поля. Если изменения электромагнитного поля в пространстве и времени не слишком резки, то рассматриваемые процессы в соседних элементах микроструктуры протекают в одном направлении, приводя к *электрической поляризации* среды,

---

* Кроме того, классическое описание не приложимо к отдельным электронам и ионам в веществе, а доступные прямому наблюдению поля в веществе являются макроскопическими.

т. е. к появлению у макроскопически различимых объемов среды дипольных электрических моментов. Электрическая поляризация может быть охарактеризована вектором плотности дипольного момента $\mathbf{P}$, называемым также *вектором плотности поляризации или просто поляризацией.*

Вектор дипольного момента двух разноименных одинаковых по величине зарядов e равен $e\mathbf{l}$, где $\mathbf{l}$ — вектор, соединяющий отрицательный и положительный заряды. При изменении дипольного момента заряды смещаются в противоположных направлениях со скоростью $\pm\frac{1}{2}\frac{\partial\mathbf{l}}{\partial t}$, что соответствует току $e\frac{\partial\mathbf{l}}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial t}(e\mathbf{l})$. Отсюда очевидно, что изменение плотности дипольного момента сопровождается макроскопическим током с плотностью $\frac{\partial\mathbf{P}}{\partial t}$, который называют *током поляризации.* Конвективный ток при определенных условиях можно отличить от тока поляризации, поскольку последний равен нулю в постоянном электромагнитном поле, сохраняющем поляризацию $\mathbf{P}$ неизменной.

3. *Поворот дипольных магнитных моментов частиц среды в направлении, соответствующем ориентации магнитных моментов вдоль магнитного поля.* Протекание этого процесса для соседних частиц среды в одном направлении приводит к макроскопическому эффекту, который может быть назван *магнитной поляризацией* или *намагничением среды.*

Магнитные моменты частиц среды (молекул, атомов, ионов) обусловлены орбитальным движением электронов и наличием спина у элементарных частиц. Формально возникновение магнитных моментов можно рассматривать как следствие существования замкнутых микротоков. Полный ток сквозь любую замкнутую поверхность S в среде, обусловленной замкнутыми токами, очевидно, равен нулю. При усреднении эти токи дадут составляющую $(\mathbf{j}_M)$ средней плотности тока, обладающую этим же свойством, т. е.

$$\iint\limits_S \langle\mathbf{j}_M\rangle\cdot\mathbf{n}\,dS=0,$$

где $\mathbf{n}$ — нормаль к S. Поэтому поле вектора $\langle\mathbf{j}_M\rangle$ соленоидально (см. § 1) и его можно представить как вихрь некоторого вектора, который принято обозначать символом $c\mathbf{M}$;

$$\langle\mathbf{j}_M\rangle=c\operatorname{rot}\mathbf{M}.$$

Вектор $\mathbf{M}$ называют *намагниченностью* среды, а вектор $c\operatorname{rot}\mathbf{M}$ — плотностью тока намагничения.

Таким образом, в общем случае усредненную плотность тока можно представить в виде суммы

$$\langle\mathbf{j}\rangle=\mathbf{j}_k+\frac{\partial\mathbf{P}}{\partial t}+c\operatorname{rot}\mathbf{M} \tag{6}$$

плотностей $\mathbf{j}_k$ — тока конвекции, $\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}$ — тока поляризации и $c \operatorname{rot} \mathbf{M}$ — *тока намагничения.*

Предположим далее, что число заряженных частиц, которые могут переноситься полем, остается при действии поля неизменным, вследствие чего имеет место закон сохранения

$$\frac{\partial \rho_k}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{j}_k = 0.$$

Тогда, усреднив закон сохранения (5), используя (6) и приняв во внимание, что расходимость соленоидального поля равна нулю, получим

$$\frac{\partial}{\partial t} (\langle \rho \rangle - \rho_k + \operatorname{div} \mathbf{P}) = 0,$$

откуда

$$\langle \rho \rangle = \rho_k - \operatorname{div} \mathbf{P} + \rho_c,$$

где ρ_c — плотность электрического заряда, распределение которого не зависит от времени и, следовательно, не меняется под действием поля. Этот заряд может быть интерпретирован как заряд, механически удерживаемый в фиксированных точках пространства. Ниже будем считать $\rho_c = 0$. Восстановление значения $\rho_c \neq 0$ может быть достигнуто простой заменой $\langle \rho \rangle \to \langle \rho \rangle + \rho_c$.

Используя полученные выражения для $\langle \mathbf{j} \rangle$ и $\langle \rho \rangle$ и заменив $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ в системе уравнений Лоренца — Максвелла (1) — (4) усредненными величинами $\langle \mathbf{E} \rangle$ и $\langle \mathbf{H} \rangle$, получим

$$\operatorname{rot} \langle \mathbf{E} \rangle = -\frac{1}{c} \frac{\partial \langle \mathbf{H} \rangle}{\partial t}, \quad \operatorname{rot} (\langle \mathbf{H} \rangle - 4\pi \mathbf{M}) = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}_k + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\langle \mathbf{E} \rangle + 4\pi \mathbf{P}),$$
$$\operatorname{div} (\langle \mathbf{E} \rangle + 4\pi \mathbf{P}) = 4\pi \rho_k, \quad \operatorname{div} \langle \mathbf{H} \rangle = 0.$$

Вектор $\mathbf{D} = \langle \mathbf{E} \rangle + 4\pi \mathbf{P}$ называют вектором *электрической индукции*, а вектор $\mathbf{B} = \langle \mathbf{H} \rangle$ — вектором *магнитной индукции*. Вектор $\langle \mathbf{E} \rangle$, обозначаемый ниже символом $\mathbf{E}$, и вектор $\langle \mathbf{H} \rangle - 4\pi \mathbf{M}$, обозначаемый ниже символом $\mathbf{H}$, называют соответственно *электрическим* и *магнитным* векторами или, что то же, *напряженностями* электрического и магнитного полей в среде. Вектор $\mathbf{j}_k$ и скаляр ρ_k ниже будут обозначаться символами $\mathbf{j}$ и ρ и называться просто *плотностями тока* и *заряда*. Выразим более наглядно произведенную замену обозначений:

$$\langle \mathbf{E} \rangle + 4\pi \mathbf{P} \to \mathbf{D}, \ \langle \mathbf{H} \rangle \to \mathbf{B}, \ \langle \mathbf{H} \rangle - 4\pi \mathbf{M} \to \mathbf{H}, \ \langle \mathbf{E} \rangle \to \mathbf{E}, \ \mathbf{j}_k \to \mathbf{j},$$
$$\rho_k \to \rho. \tag{7}$$

В этих обозначениях существует некоторая исторически сложившаяся непоследовательность, поскольку усредненными значениями истинных полей являются векторы, обозначаемые символами $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$, тогда как вместо $\mathbf{B}$ естественно было бы писать $\mathbf{H}$; векторами, включающими индуцированные поля $4\pi\mathbf{P}$ и $-4\pi\mathbf{M}$, являются векторы, обозначаемые символами $\mathbf{D}$ и $\mathbf{H}$, тогда как символ $\mathbf{H}$ было бы естественней отнести к усредненному истинному полю. Та же несообразность и в названиях: средними значениями истинных напряженностей являются электрический вектор и вектор магнитной индукции, тогда как индуцированные поля включают вектор электрической индукции и магнитный вектор. Что же касается до использования обозначений $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$, $\mathbf{j}$ и ρ, совпадающих с обозначениями в (1)—(4), но имеющих иной смысл, то это практически при некоторой осмотрительности не ведет к недоразумениям.

Усредненные уравнения Лоренца—Максвелла называют *уравнениями Максвелла*. В новых обозначениях (7) они имеют вид:

$$\operatorname{rot}\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}, \tag{8}$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{H} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j} + \frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}, \tag{9}$$

$$\operatorname{div}\mathbf{D} = 4\pi\rho, \tag{10}$$

$$\operatorname{div}\mathbf{B} = 0. \tag{11}$$

Можно показать, что все входящие в эти уравнения величины могут быть независимо измерены* макроскопическими методами и, следовательно, имеют физический смысл, как макроскопические величины.

В отсутствии поляризующейся среды $\mathbf{D} = \mathbf{E}$, $\mathbf{B} = \mathbf{H}$ и уравнения Максвелла приобретают вид уравнений (1)—(4).

Из уравнений Максвелла, так же как из уравнений Лоренца—Максвелла, следует закон сохранения электрического заряда в форме (5) и, наоборот, из уравнений (5) и (9) с точностью до константы интегрирования следует уравнение (10). Аналогично из (8) следует, что $\operatorname{div}\mathbf{B} = \text{const}$ и, следовательно, уравнение (11) определяет лишь константу интегрирования. Поэтому, как и в отношении уравнений Лоренца—Максвелла, можно сказать, что, по существу, уже два первых уравнения Максвелла (8) и (9) образуют полную систему уравнений электромагнитного поля, уравнения же (10) и (11), являясь следствием закона сохранения электрического заряда и отсутствия магнитного заряда, выражают ограничения на возможные распределения электромагнитного поля в пространстве, что должно быть учтено при задании начальных условий.

Система (8)—(9) содержит шесть уравнений для пятнадцати компонент векторов $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$, $\mathbf{D}$, $\mathbf{B}$ и $\mathbf{j}$. В действительности, из рассмотрения процессов поляризации и возникновения тока следует, что между векторами $\mathbf{E}$ и $\mathbf{D}$, между векторами $\mathbf{H}$ и $\mathbf{B}$, а также между векторами $\mathbf{j}$, $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$ должны существовать функци-

---

* См., например, З о м м е р ф е л ь д [28], гл. II, § 11 и 13.

ональные связи, вследствие чего из этих пяти векторов только два независимы; за них принимают обычно векторы **E** и **H**. Если электромагнитное поле изменяется достаточно медленно, так что процессы поляризации успевают следовать за изменениями поля, то соотношения между рассматриваемыми пятью векторами не зависят от производных этих векторов по времени. Удовлетворяющие этому условию поля будем называть *квазистационарными*. В подавляющем большинстве сред при $\mathbf{E}=\mathbf{B}=0$, т. е. при отсутствии внешнего макроскопического поля, векторы **D**, **H** и **j** равны нулю*. Для таких сред, если, кроме того, они однородны и изотропны в отношении электромагнитных свойств, и квазистационарных полей с хорошей точностью соблюдаются соотношения

$$\mathbf{D}=\varepsilon\mathbf{E}, \tag{12}$$

$$\mathbf{B}=\mu\mathbf{H}, \tag{13}$$

где ε и μ — не зависящие от **E** и **H** постоянные, получившие наименования соответственно *электрической* и *магнитной проницаемостей* среды. Соотношения (12), (13) перестают быть верными для очень сильных полей, приближающихся к микрополям в среде. Для плотности тока **j** та же степень приближения, что в (12), (13), дается *законом Ома*, который может быть сформулирован как утверждение, что плотность тока в данной точке среды пропорциональна силе, с которой усредненное по микроструктуре электромагнитное поле действовало бы в этой точке среды на единичный положительный заряд, движущийся вместе со средой. Если среда неподвижна, то на единичный положительный заряд действует сила, равная напряженности **E**. Если же в рассматриваемой точке среда движется со скоростью **v**, то на заряд действует также сила $\frac{1}{c}\mathbf{v}\times\mathbf{B}$, обусловленная магнитным полем, так что в общем случае, с учетом (13), закон Ома может быть выражен соотношением

$$\mathbf{j}=\sigma\left(\mathbf{E}+\frac{\mu}{c}\mathbf{v}\times\mathbf{H}\right), \tag{14}$$

где σ — постоянная, называемая *электропроводностью* среды.

Во многих практических задачах, как об этом упоминалось в предыдущем параграфе, удобно считать, что кроме токов, обусловленных электропроводностью среды, в среде существует еще заданное поле $\mathbf{j}^{(e)}$ *сторонних* токов, создаваемых некоторым известным процессом (например, в антенне передатчика). Заменив в уравнениях Максвелла (8)—(9) **j** на $\mathbf{j}+\mathbf{j}^{(e)}$ и подставив в них (12)—(14), приведем их к виду

$$\operatorname{rot}\mathbf{E}=\frac{\mu}{c}\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial t};\quad \operatorname{rot}\mathbf{H}=\frac{4\pi\sigma}{c}\left(\mathbf{E}+\frac{\mu}{c}\mathbf{v}\times\mathbf{H}\right)+\frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}+\frac{4\pi}{c}\mathbf{j}^{(e)}. \tag{15}$$

---

* Это неверно для сегнетоэлектриков, ферромагнетиков и сверхпроводников, к которым изложенные ниже соотношения непосредственно неприменимы.

Здесь число неизвестных уже равно числу уравнений, если скорость среды $\mathbf{v}$ считать известной.

Существуют два важных класса сред, называемых проводниками и диэлектриками. *Проводниками* называют среды с высокой электропроводностью. Перемещение зарядов в проводнике, помещенном во внешнее электрическое поле, создает поле, обратное внешнему *(поляризация проводника)*. В частности, как известно из электростатики, *статическое* электрическое поле в проводнике всегда равно нулю. Если внешнее поле меняется настолько медленно, что процесс поляризации успевает следовать за его изменениями (внешнее поле при этом называют *квазистационарным*), то внутри проводника существует только электрическое поле, индуцированное изменениями магнитного поля в соответствии с первым из уравнений Максвелла (15). При этом оказывается, что член $\frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$ во втором уравнении (15) очень мал и в пределах точности, обеспечиваемой описанием среды соотношениями (12)—(14), его можно опустить. Применив операцию rot ко второму из уравнений (15) и подставив значение $\operatorname{rot}\mathbf{E}$ в первое из них, получим

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} - \operatorname{rot}\mathbf{v}\times\mathbf{H} = -\frac{c^2}{4\pi\mu\sigma}\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{H} + \frac{4\pi}{\mu}\operatorname{rot}\mathbf{j}^{(e)},$$

откуда, ввиду $\operatorname{div}\mathbf{B} = \mu\operatorname{div}\mathbf{H} = 0$, с помощью формул § 1 найдем, что в средах с высокой электропроводностью

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} - \operatorname{rot}(\mathbf{v}\times\mathbf{H}) = \frac{c^2}{4\pi\mu\sigma}\Delta\mathbf{H} + \frac{4\pi}{\mu}\operatorname{rot}\mathbf{j}^{(e)}, \tag{16}$$

где Δ — оператор Лапласа.

Если скорость среды $\mathbf{v} = 0$, то из (16) для каждой из компонент вектора $\mathbf{H}$ (в прямоугольной прямолинейной системе координат) получается *уравнение теплопроводности и диффузии*. Таким образом, процесс распространения магнитного поля в электропроводной среде носит тот же характер, что и процессы диффузии и распространения тепла, изученные в части III. В связи с этим ниже они детально рассматриваться не будут.

Диэлектриками называют среды, не содержащие свободных зарядов и, вследствие этого, не обладаюшие электропроводностью. Для таких сред уравнения Максвелла (15) приводятся к виду

$$\operatorname{rot}\mathbf{E} = -\frac{\mu}{c}\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \quad \operatorname{rot}\mathbf{H} = \frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}^{(e)}. \tag{17}$$

Продифференцировав одно из этих уравнений по t и подставив результат во второе уравнение, можно разделить переменные и получить уравнения

$$\Delta \mathbf{E} - \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \frac{4\pi\mu}{c^2}\frac{\partial \mathbf{j}^{(e)}}{\partial t}, \tag{18}$$

$$\Delta \mathbf{H} - \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} = \frac{4\pi}{c}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{j}^{(e)}. \tag{19}$$

Таким образом, электрическое и магнитное поля в диэлектриках (и, в частности, в пустоте) удовлетворяют *волновым уравнениям* (гл. I, § 1) и, следовательно, процессы распространения электромагнитного поля в диэлектриках носят *волновой характер*, детально изучавшийся в гл. VIII. Ниже результаты гл. VIII будут дополнены рассмотрением ряда задач, относящихся к стационарным периодическим электромагнитным процессам, играющим исключительно важную роль в технике.

Соотношения (12)—(19) справедливы для однородных и изотропных сред. Из (8)—(9) легко вывести уравнения для сред, в которых проницаемости меняются от точки к точке. Эти уравнения, однако, практически менее употребительны, так как более сложны для решения. Чаще рассматривается случай, когда две или несколько однородных сред соприкасаются между собой на некоторых граничных поверхностях. Для точек граничных поверхностей соотношения (12)—(19) неприменимы и должны быть заменены граничными условиями:

$$\begin{aligned} &\mathbf{n}\times(\mathbf{H}_e - \mathbf{H}_i) = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}_{\text{пов}}, \quad \mathbf{n}\cdot(\mathbf{D}_e - \mathbf{D}_i) = 4\pi\rho_{\text{пов}}, \\ &\mathbf{n}\times(\mathbf{E}_e - \mathbf{E}_i) = 0, \quad \mathbf{n}\cdot(\mathbf{B}_e - \mathbf{B}_i) = 0. \end{aligned} \tag{20}$$

Индексами i и e здесь отмечены предельные значения векторов поля при приближении к поверхности раздела соответственно со стороны среды i и среды e, $\mathbf{n}$ — единичный вектор нормали к поверхности раздела, направленный от среды i к среде e, $\mathbf{j}_{\text{пов}}$ и $\rho_{\text{пов}}$ — поверхностные плотности тока и заряда. Эти же условия должны быть, естественно, соблюдены и на границах области, занятой электромагнитным полем в однородной среде. Это показывает, что электромагнитное поле, вообще говоря, проникает за любую границу, отделяющую различные среды.

Граничные условия (20) являются следствием уравнений Максвелла (8)—(9) и легко выводятся с помощью формул Остроградского—Гаусса и Стокса. В § 7 в несколько преобразованной форме они будут выведены из уравнений Максвелла.

§ 4. Уравнения магнитной гидродинамики

Из уравнений Максвелла (15) следует, что движение электропроводной среды оказывает влияние на электромагнитное поле. Покажем, что и наоборот, электромагнитное поле в электропро-