получить уравнения

$$\Delta \mathbf{E}-\frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}=\frac{4\pi\mu}{c^2}\frac{\partial \mathbf{j}^{(e)}}{\partial t}, \tag{18}$$

$$\Delta \mathbf{H}-\frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2}=\frac{4\pi}{c}\operatorname{rot}\mathbf{j}^{(e)}. \tag{19}$$

Таким образом, электрическое и магнитное поля в диэлектриках (и, в частности, в пустоте) удовлетворяют *волновым уравнениям* (гл. I, § 1) и, следовательно, процессы распространения электромагнитного поля в диэлектриках носят *волновой характер*, детально изучавшийся в гл. VIII. Ниже результаты гл. VIII будут дополнены рассмотрением ряда задач, относящихся к стационарным периодическим электромагнитным процессам, играющим исключительно важную роль в технике.

Соотношения (12)—(19) справедливы для однородных и изотропных сред. Из (8)—(9) легко вывести уравнения для сред, в которых проницаемости меняются от точки к точке. Эти уравнения, однако, практически менее употребительны, так как более сложны для решения. Чаще рассматривается случай, когда две или несколько однородных сред соприкасаются между собой на некоторых граничных поверхностях. Для точек граничных поверхностей соотношения (12)—(19) неприменимы и должны быть заменены граничными условиями:

$$\begin{aligned}&\mathbf{n}\times(\mathbf{H}_e-\mathbf{H}_i)=\frac{4\pi}{c}\mathbf{j}_{\text{пов}},\quad \mathbf{n}\cdot(\mathbf{D}_e-\mathbf{D}_i)=4\pi\rho_{\text{пов}},\\&\mathbf{n}\times(\mathbf{E}_e-\mathbf{E}_i)=0,\quad \mathbf{n}\cdot(\mathbf{B}_e-\mathbf{B}_i)=0.\end{aligned} \tag{20}$$

Индексами i и e здесь отмечены предельные значения векторов поля при приближении к поверхности раздела соответственно со стороны среды i и среды e, $\mathbf{n}$ — единичный вектор нормали к поверхности раздела, направленный от среды i к среде e, $\mathbf{j}_{\text{пов}}$ и $\rho_{\text{пов}}$ — поверхностные плотности тока и заряда. Эти же условия должны быть, естественно, соблюдены и на границах области, занятой электромагнитным полем в однородной среде. Это показывает, что электромагнитное поле, вообще говоря, проникает за любую границу, отделяющую различные среды.

Граничные условия (20) являются следствием уравнений Максвелла (8)—(9) и легко выводятся с помощью формул Остроградского—Гаусса и Стокса. В § 7 в несколько преобразованной форме они будут выведены из уравнений Максвелла.

§ 4. Уравнения магнитной гидродинамики

Из уравнений Максвелла (15) следует, что движение электропроводной среды оказывает влияние на электромагнитное поле. Покажем, что и наоборот, электромагнитное поле в электропроводной среде вызывает появление гидродинамических сил, влияющих на ее движение.

Пусть ρ — макроскопическая плотность положительного заряда, принадлежащего положительно заряженным частицам среды, а $\mathbf{v}_+$ — средняя скорость этих частиц. Электропроводная среда нейтральна (избыточный заряд проводника всегда находится на его поверхности). Поэтому макроскопическая плотность отрицательного заряда, принадлежащего отрицательно заряженным частицам среды, равна $-\rho$. Среднюю скорость этих частиц обозначим через $\mathbf{v}_-$. Со стороны магнитного поля на заряды, содержащиеся в единице объема среды, будет действовать лоренцова сила $\mathbf{f}=\frac{1}{c}\rho(\mathbf{v}_+ + \mathbf{v}_-)\times\mathbf{B}$. Сумма $\rho(\mathbf{v}_+ + \mathbf{v}_-)$ есть, по определению, плотность тока $\mathbf{j}$. Выразив $\mathbf{j}$ с помощью (9) и опустив, как и в предыдущем параграфе, член $\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}$, пренебрежимо малый в среде с высокой электропроводностью, получим

$$\mathbf{f}=\frac{1}{c}\mathbf{j}\times\mathbf{B}=\frac{1}{4\pi}(\operatorname{rot}\mathbf{H})\times\mathbf{B}. \tag{21}$$

Вследствие столкновений между частицами — носителями тока и другими частицами среды, сила, действующая на носители тока, передается всей среде. Следовательно, со стороны магнитного поля на каждую единицу объема среды действует лоренцова сила $\mathbf{f}$. Что же касается сил, действующих со стороны электрического поля, то они отсутствуют не только потому, что электрическое поле в электропроводной среде мало, но и потому, что такая среда в среднем электрически нейтральна, так как избыточные заряды под действием электростатического отталкивания сосредоточиваются на границе области, занятой средой.

Ввиду взаимодействия электромагнитного поля с подвижной электропроводной средой, системы уравнений, описывающих поле и среду, оказываются связанными между собой. Как упоминалось, в приближении квазистационарного поля электрическое поле в электропроводной среде мало, а основную роль играет магнитное поле. Поэтому теория, рассматривающая квазистационарные электромагнитные поля в подвижной электропроводной сплошной среде, получила название *магнитной гидродинамики*. Физическими средами, к которым практически прилагается магнитная гидродинамика, являются *плазма*, т. е. сильно ионизированный газ, и жидкие металлы. Широкое развитие магнитная гидродинамика получила в связи с проблемами звездных атмосфер, магнитных полей в межзвездной среде, управляемого термоядерного синтеза, плазменных двигателей и электрических генераторов, магнитных насосов и магнитных подвесов для плавки металла в вакууме.

Полная система уравнений магнитной гидродинамики включает, во-первых, уравнения гидродинамики (уравнение непрерывности, уравнения движения, уравнение состояния, уравнение переноса тепла) с добавочными членами, учитывающими действие на среду электромагнитного поля, и, во-вторых, уравнения Максвелла для электромагнитного поля в движущейся среде. Не представляет труда выписать эти уравнения. Здесь, ради сокращения записи, выпишем их при некоторых упрощающих предположениях.

Предполагая, что электропроводность среды высока, а вязкость мала, пренебрежем потерями на джоулево тепло и внутреннее трение*. Температуру среды будем считать одинаковой во всех точках среды. При этих условиях роль переноса тепла в среде мала и им можно пренебречь. Для всех сред, с которыми имеет дело магнитная гидродинамика, магнитная проницаемость близка к единице и можно положить $\mu=1$.

Выражения, входящие в (16) и (21) и содержащие операцию rot, удобно преобразовать с помощью формул § 1:

$$\operatorname{rot}(\mathbf{v}\times\mathbf{H})=(\mathbf{H}\cdot\nabla)\,\mathbf{v}-(\mathbf{v}\cdot\nabla)\,\mathbf{H}-\mathbf{H}\operatorname{div}\mathbf{v},$$

$$(\operatorname{rot}\mathbf{H})\times\mathbf{H}=(\mathbf{H}\cdot\nabla)\,\mathbf{H}-\frac{1}{2}\operatorname{grad}\mathbf{H}^2.$$

Введем далее «субстанциональную» производную

$$\frac{d}{dt}=\frac{\partial}{\partial t}+\mathbf{v}\cdot\nabla,$$

характеризующую скорость изменения величины, стоящей под знаком производной, не в данной фиксированной точке пространства, а для определенного, участвующего в движении жидкости элемента объема жидкости.

Взяв уравнение движения несжимаемой жидкости в форме Навье—Стокса (см., например, гл. XXXVII, § 1) и добавив в правую часть член, соответствующий (16), гидродинамические уравнения можно записать в виде:

$$\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t}=-\frac{1}{\rho_c}\operatorname{grad}\left(p+\frac{1}{8\pi}\,\mathbf{H}^2\right)+\frac{1}{4\pi\rho_c}\,(\mathbf{H}\cdot\nabla)\,\mathbf{H}+$$

$$+\frac{\eta}{\rho_c}\,\Delta\mathbf{v}+\frac{1}{\rho_c}\left(\zeta+\frac{\eta}{3}\right)\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{v}, \tag{22}$$

$$\frac{\partial\rho_c}{\partial t}+\operatorname{div}\mathbf{v}\rho_c=0, \tag{23}$$

где ρ_c — плотность жидкости, а η и ζ — ее *коэффициенты вязкости*. Соответственно для магнитного поля, в силу (16) и (11), получим

$$\frac{d\mathbf{H}}{dt}=(\mathbf{H}\cdot\nabla)\,\mathbf{v}+\frac{c^2}{4\pi\sigma}\,\Delta\mathbf{H}-\mathbf{H}\operatorname{div}\mathbf{v}+4\pi\operatorname{rot}\mathbf{j}^{(e)}, \tag{24}$$

$$\operatorname{div}\mathbf{H}=0. \tag{25}$$

* Отметим, что «малость» потерь, т. е. возможность пренебрежения ими, зависит также от характера движения, а не только от значений вязкости и электропроводности. Это же замечание можно сделать и в отношении делаемого ниже предположения о постоянстве температуры.

Уравнения (22)—(25) и представляют полную систему уравнений магнитной гидродинамики в рассматриваемом приближении.

Отметим в связи с этими уравнениями два обстоятельства.

Из уравнения (22) следует, что роль, аналогичную давлению p в гидродинамике, в магнитной гидродинамике играет сумма $p+\frac{1}{8\pi}\mathbf{H}^2$. Член $\frac{1}{8\pi}\mathbf{H}^2$ называют *магнитным давлением*. По своему влиянию на движение жидкости он неотличим от гидродинамического давления p. Можно показать, что действие магнитного поля на проводящую жидкость вообще сводится к магнитному давлению $\frac{1}{8\pi}\mathbf{H}^2$ и магнитному *натяжению* $\frac{1}{4\pi}\mathbf{H}^2$, действующему вдоль силовых магнитных линий поля. Последнее обстоятельство, в частности, означает, что в среде существуют силы, стремящиеся сократить длину магнитных силовых линий.

Из уравнения неразрывности (23) и формул § 1 следует, что

$$\operatorname{div}\mathbf{v}=-\frac{1}{\rho_c}\left(\frac{\partial\rho_c}{\partial t}+\mathbf{v}\cdot\operatorname{grad}\rho_c\right)=-\frac{1}{\rho_c}\left(\frac{\partial\rho_c}{\partial t}+(\mathbf{v}\cdot\nabla)\rho_c\right)=-\frac{1}{\rho_c}\frac{d\rho_c}{dt}.$$

Разделив уравнение (24) на ρ_c, подставив найденное значение для $\operatorname{div}\mathbf{v}$ и заметив, что

$$\frac{1}{\rho_c}\frac{d\mathbf{H}}{dt}=\frac{d}{dt}\frac{\mathbf{H}}{\rho_c}+\frac{\mathbf{H}}{\rho_c^2}\frac{d\rho_c}{dt},$$

получим

$$\frac{d}{dt}\frac{\mathbf{H}}{\rho_c}=\left(\frac{\mathbf{H}}{\rho_c}\cdot\nabla\right)\mathbf{v}+\frac{c^2}{4\pi\sigma}\Delta\frac{\mathbf{H}}{\rho_c}+\frac{4\pi}{\rho_c}\operatorname{rot}\mathbf{j}^{(e)}. \tag{26}$$

Выясним физический смысл первых двух членов в правой части. Для этого примем сначала, что отличен от нуля только первый член в правой части, т. е.

$$\frac{d}{dt}\frac{\mathbf{H}}{\rho_c}=\left(\frac{\mathbf{H}}{\rho_c}\cdot\nabla\right)\mathbf{v}. \tag{27}$$

По смыслу дифференцирования $\frac{d}{dt}$ это уравнение определяет значение вектора $\frac{\mathbf{H}}{\rho_c}$ для некоторой произвольной жидкой частицы*. Рассмотрим также другую жидкую частицу, которая в некоторый момент времени близка к первой и расположена от нее в направлении вектора $\frac{\mathbf{H}}{\rho_c}$, т. е. на векторной линии поля $\frac{\mathbf{H}}{\rho_c}$, проходящей через первую частицу. Пусть $\delta\mathbf{l}$ — направленный отрезок, начало которого совпадает с первой частицей, а конец — со второй. По условию в некоторый момент времени векторы $\frac{\mathbf{H}}{\rho_c}$ и $\delta\mathbf{l}$ параллельны.

---

* *Жидкой частицей* называют элемент объема жидкости, переносимый жидкостью при ее движении («состоящий из одних и тех же частиц жидкости»).

Если $\mathbf{v}$ — скорость первой частицы, то скорость второй частицы в тот же момент времени равна $\mathbf{v}+(\delta\mathbf{l}\cdot\nabla)\mathbf{v}$. Таким образом, за время dt начальная точка отрезка δl сместится на $\mathbf{v}dt$, а конечная — на $\mathbf{v}dt+(\delta\mathbf{l}\cdot\nabla)\mathbf{v}dt$, т. е. изменение отрезка за единицу времени

$$\frac{d}{dt}\delta\mathbf{l}=(\delta\mathbf{l}\cdot\nabla)\mathbf{v}.$$

Это уравнение совпадает с (27), т. е. при сделанных предположениях изменение векторов $\frac{\mathbf{H}}{\rho_c}$ и $\delta\mathbf{l}$ с течением времени определяется одним и тем же уравнением. Поскольку оно однородно, то из совпадения направлений векторов $\frac{\mathbf{H}}{\rho_c}$ и $\delta\mathbf{l}$ в некоторый момент времени следует, что их направления совпадают и во все моменты времени, а длины векторов меняются пропорционально друг другу. Иначе говоря, вторая жидкая частица, находившаяся в некоторый момент времени на векторной линии поля $\frac{\mathbf{H}}{\rho_c}$, проходящей через первую частицу, остается на векторной линии, проходящей через первую частицу, и во все моменты времени, а длина вектора $\frac{\mathbf{H}}{\rho_c}$ с течением времени меняется пропорционально расстоянию между рассматриваемыми чистицами. Отсюда следует, что жидкая линия, составленная из жидких частиц, находившихся на векторной линии поля $\frac{\mathbf{H}}{\rho_c}$ в некоторый момент времени, совпадает с векторной линией поля $\frac{\mathbf{H}}{\rho_c}$ во все моменты времени, длина же вектора $\frac{\mathbf{H}}{\rho_c}$, соответствующая какой-либо частице жидкой линии, меняется пропорционально растяжению жидкой линии в месте расположения этой частицы.

Имея в виду описанную картину, говорят, что член $\left(\frac{\mathbf{H}}{\rho_c}\cdot\nabla\right)\mathbf{v}$ в (26) соответствует *переносу* магнитного поля движущейся жидкостью, а когда другими процессами можно пренебречь, говорят, что магнитное поле *переносится током жидкости* или что оно «вморожено» в жидкость.

Предположим теперь, что в правой части (26) отличен от нуля только член $\frac{c^2}{4\pi\sigma}\Delta\frac{\mathbf{H}}{\rho_c}$. Тогда уравнение (26) представляет уравнение диффузии. В этом смысле говорят, что член $\frac{c}{4\pi\sigma}\Delta\frac{\mathbf{H}}{\rho_c}$ описывает *диффузию магнитного поля* в жидкости.

Среды, к которым приложима магнитная гидродинамика, обычно обладают высокой электропроводностью, вследствие чего в большинстве явлений в этих средах процесс переноса магнитного поля является преобладающим, т. е. среда как бы скреплена с магнитным полем. Это приводит ко многим интересным явлениям, играющим особенно большую роль в космических процессах. Например, магнитное поле Солнца удерживает его поверхность в сравнительно устойчивом состоянии: многие детали на поверхности Солнца могут наблюдаться в течение многих месяцев. Плазменные образования при столкновении не могут быстро проникнуть друг в друга. Истечение солнечного вещества с поверхности Солнца происходит в виде облаков, удерживаемых от рассеивания в пространстве магнитным полем. Эти и многие другие явления в чрезвычайно подвижной и лишенной сил сцепления среде, какой является разряженная плазма, кажутся совершенно парадоксальными, если не принимать во внимание «вмороженное» магнитное поле.

§ 5. Потенциалы электромагнитного поля

Уравнения элекромагнитного поля в однородной изотропной среде можно привести к виду, при котором число уравнений, определяющих поле, меньше числа уравнений Максвелла. Одним из способов такого приведения является введение *потенциалов поля*.

Используя то обстоятельство, что поле вектора **B** магнитной индукции соленоидально, положим

$$\mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{A}. \tag{28}$$

Уравнение Максвелла (11) при этом выполняется тождественно. Вектор **A** называют *векторным потенциалом* электромагнитного поля. Подставив (28) в уравнение Максвелла (8), получим

$$\operatorname{rot}\left(\mathbf{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\right) = 0,$$

откуда в предположении, что область пространства, занятая полем, односвязна, следует, что сумма $\mathbf{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$ является градиентом некоторого скаляра, который обозначим через $-\varphi$:

$$\mathbf{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\operatorname{grad}\varphi. \tag{29}$$

Скаляр φ называют *скалярным потенциалом*.

Векторный потенциал определен с точностью до слагаемого, представляющего градиент произвольной функции координат и времени, преобразующийся при преобразовании координат как скаляр. В самом деле, так как $\operatorname{rot}\operatorname{grad}\psi = 0$, где ψ — произвольный скаляр, то $\operatorname{rot}\mathbf{A} = \operatorname{rot}(\mathbf{A} + \operatorname{grad}\psi)$. Ввиду (29) при замене $\mathbf{A} \to \mathbf{A} + \operatorname{grad}\psi$ потенциал φ должен быть заменен на $\varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial\psi}{\partial t}$. Таким образом, векторный потенциал определен с точностью до