Уравнения (34)—(35) удобны при рассмотрении электромагнитного поля в диэлектрической среде, где $\mathbf{j}$ и ρ либо равны нулю, либо представляют сторонние заданные величины $\mathbf{j}^{(e)}$ и $\rho^{(e)}$. В электропроводной среде в приближении закона Ома $\mathbf{j}=\sigma\mathbf{E}+\mathbf{j}^{(e)}$. Взяв значение $\mathbf{E}$ из (32) и подставив значение $\mathbf{j}$ в (31), получим

$$\Delta\mathbf{A}-\frac{4\pi\mu\sigma}{c^2}\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}-\frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2}=-\frac{4\pi\mu}{c}\mathbf{j}^{(e)}+\operatorname{grad}\left(\frac{\varepsilon\mu}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\frac{4\pi\mu\sigma}{c}\varphi+\operatorname{div}\mathbf{A}\right).$$

Если теперь выбор потенциалов подчинить условию

$$\frac{\varepsilon\mu}{c}\frac{d\varphi}{dt}+\frac{4\pi\mu\sigma}{c}\varphi+\operatorname{div}\mathbf{A}=0, \tag{36}$$

то получим

$$\Delta\mathbf{A}-\frac{4\pi\mu\sigma}{c^2}\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}-\frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2}=-\frac{4\pi\mu}{c}\mathbf{j}^{(e)}. \tag{37}$$

Здесь правая часть задана. В отличие от этого, подставив в (30) значение $\operatorname{div}\mathbf{A}$ из (36), получим

$$\Delta\varphi-\frac{4\pi\mu\sigma}{c^2}\frac{\partial\varphi}{\partial t}-\frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}=-\frac{4\pi}{\varepsilon}\rho, \tag{38}$$

где правая часть неизвестна. Поэтому, если векторный потенциал удалось найти, то скалярный потенциал естественнее находить из (36). Заметим, что если после этого определить $\mathbf{E}$ из (32), а ρ из уравнения $\operatorname{div}\mathbf{E}=\frac{4\pi}{\varepsilon}\rho$, то (38) удовлетворяется тождественно.

§ 6. Периодические по времени электромагнитные поля

Важнейшим случаем волновых электромагнитных полей являются поля, периодические по времени. Это связано не только с тем, что к таким полям приводят многие практические задачи, в которых, например, изучается распространение радиоволн, но и с тем, что произвольное волновое поле может быть представлено как наложение периодических по времени полей. Такое представление в конечной области дается рядом, а в бесконечной — интегралом Фурье. Ниже в этой книге будут рассматриваться только периодические по времени поля. Периодичность по времени в каждой точке пространства подразумевает стационарность — неизменность во времени — величин, однозначно характеризующих поле в данной точке (например, амплитуд и периода колебаний). Поэтому периодические по времени поля *стационарны*.

Как и в предыдущих параграфах, будем предполагать, что изменение электромагнитного поля во времени в каждой точке среды происходит достаточно медленно, чтобы были справедливы соотношения $\mathbf{D}=\varepsilon\mathbf{E}$, $\mathbf{B}=\mu\mathbf{H}$. Закон Ома примем в форме $\mathbf{j}=\sigma\mathbf{E}$, т. е. среду будем считать покоющейся.

Для изучения стационарных полей применим тот же прием, как и при переходе от волнового уравнения к уравнению Гельмгольца, описывающему стационарное волновое поле (гл. XXIV). Именно, заметив, что, аналогично скаляру, всякий периодический во времени вектор $\mathbf{a}$ может быть представлен в виде $\mathbf{a}=\mathrm{Re}\,\tilde{\mathbf{a}}e^{-i\omega t}$, где ω — круговая частота колебаний, t — время, а $\tilde{\mathbf{a}}$ — вектор с комплексными компонентами, не зависящий от времени, представим величины, входящие в уравнения Максвелла, в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{E}=\mathrm{Re}\,\tilde{\mathbf{E}}e^{-i\omega t},\quad \mathbf{H}=\mathrm{Re}\,\tilde{\mathbf{H}}e^{-i\omega t},\\ \mathbf{j}=\mathrm{Re}\,\tilde{\mathbf{j}}e^{-i\omega t},\quad \rho=\mathrm{Re}\,\tilde{\rho}e^{-i\omega t}. \end{aligned}\tag{39}$$

Для отыскания периодического поля достаточно найти *комплексные амплитуды* $\tilde{\mathbf{E}}$, $\tilde{\mathbf{H}}$, $\tilde{\mathbf{j}}$ и $\tilde{\rho}$.

При рассмотрении стационарных полей для комплексных амплитуд $\tilde{\mathbf{E}}$, $\tilde{\mathbf{H}}$, $\tilde{\mathbf{j}}$ и $\tilde{\rho}$ часто сохраняют те же обозначения $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$, $\mathbf{j}$, ρ и названия *электрического* и *магнитного вектора*, *плотности тока* и *заряда*, которые использовались в предыдущих параграфах. Ниже также принята эта условность, позволяющая избежать введения новых терминов и обозначений. В случае необходимости отличить величины — комплексные амплитуды от величин, используемых в предыдущих параграфах, будем перед наименованием или символом величины добавлять слово «комплексный».

Ввиду линейности уравнений Максвелла при комплексных значениях, входящих в них зависимых переменных, вещественные и мнимые части этих переменных не влияют друг на друга. Поэтому для получения уравнений относительно комплексных амплитуд в уравнениях Максвелла (15), (10) и (11) вместо подстановок вида (39) достаточно (с учетом принятого соглашения относительно обозначений) произвести замены

$$\mathbf{E}\longrightarrow\mathbf{E}e^{-i\omega t},\quad \mathbf{H}\longrightarrow\mathbf{H}e^{-i\omega t},\quad \mathbf{j}\longrightarrow\mathbf{j}e^{-i\omega t},\quad \rho\longrightarrow\rho^{-i\omega t},$$

что, после сокращения на множитель $e^{-i\omega t}$, приведет к системе уравнений

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{E}=\frac{i\omega\mu}{c}\mathbf{H},\tag{40}$$

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{H}=\frac{4\pi\sigma-i\omega\varepsilon}{c}\mathbf{E}+\frac{4\pi}{c}\mathbf{j}^{(e)},\tag{41}$$

$$\mathrm{div}\,\mathbf{E}=\frac{4\pi}{\varepsilon}\rho,\tag{42}$$

$$\mathrm{div}\,\mathbf{H}=0.\tag{43}$$

Эту систему также принято называть *системой уравнений Максвелла*.

Отметим, что формально переход к уравнениям для комплексных величин осуществляется заменой

$$\frac{\partial}{\partial t} \longrightarrow -i\omega.$$

Когда комплексные величины $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$, $\mathbf{j}$, ρ найдены, вещественные векторы, использовавшиеся в предыдущих параграфах, могут быть получены заменой $\mathbf{E} \to \mathrm{Re}\,\mathbf{E}e^{-i\omega t}$ и аналогично для остальных величин.

Применив операцию div к уравнению (41) и используя (42), получим *закон сохранения заряда*

$$\rho = \frac{\varepsilon}{i\omega\varepsilon - 4\pi\sigma} \operatorname{div} \mathbf{j}^{(e)}. \tag{44}$$

Таким образом, если в поле нет сторонних закрепленных зарядов, что предполагалось при выводе уравнения (15), то отличие плотности заряда от нуля может быть вызвано только действием стороннего тока, т. е., иначе говоря, также внесением заряда искусственным путем.

Применив операцию rot к (40), заметив, что согласно формулам § 1 $\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{E} = -\Delta\mathbf{E} + \operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{E}$, и подставив значения величин из других уравнений, получим

$$\Delta\mathbf{E} + k^2\mathbf{E} = \frac{4\pi}{i\omega\varepsilon - 4\pi\sigma} \operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{j}^{(e)} - \frac{4\pi i\omega\mu}{c^2}\mathbf{j}^{(e)}, \tag{45}$$

где

$$k^2 = \frac{\omega^2\varepsilon\mu + 4\pi i\omega\sigma\mu}{c^2}. \tag{46}$$

Аналогично, применив операцию rot к (41) и используя другие уравнения, получим

$$\Delta\mathbf{H} + k^2\mathbf{H} = -\frac{4\pi}{c}\operatorname{rot}\mathbf{j}^{(e)}. \tag{47}$$

Уравнения (45) и (47) суть уравнения Гельмгольца относительно компонент комплексных векторов $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$. При отсутствии сторонних токов и равной нулю электропроводности, т. е. для диэлектрических сред, они переходят в однородные уравнения Гельмгольца с вещественным положительным значением $k^2 = \frac{\omega^2\varepsilon\mu}{c^2}$. В этом случае (§ 5, гл. XXIV) существуют решения уравнения Гельмгольца в виде бегущих волн, причем величина $c = \frac{\omega}{k}$ представляет их фазовую скорость. Следовательно, фазовая скорость бегущих электромагнитных волн

$$c_1 = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}.$$

В пустоте $\varepsilon=\mu=1$, т. е. электродинамическая постоянная c представляет фазовую скорость электромагнитных волн в пустоте.

Аналогично тому, как это было сделано в § 5, можно ввести векторный и скалярный комплексные потенциалы. Проще непосредственно в формулах § 5 произвести замену $\varphi \longrightarrow \varphi e^{-i\omega t}$, $\mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{A}e^{-i\omega t}$ или, что равносильно, $\frac{\partial}{\partial t} \longrightarrow -i\omega$. Используя уравнения (37) и (36), применение которых удобно, когда связь между векторами $\mathbf{j}$ и $\mathbf{E}$ выражается законом Ома, получим

$$\Delta\mathbf{A}+k^2\mathbf{A}=-\frac{4\pi\mu}{c}\,\mathbf{j}^{(e)} \tag{48}$$

и

$$\varphi=-\frac{i\omega}{ck^2}\operatorname{div}\mathbf{A}. \tag{49}$$

Здесь k^2 то же, что выше, и определяется формулой (46). Комплексные векторы поля определяются преобразованными формулами (32):

$$\begin{aligned} \mathbf{E}&=-\operatorname{grad}\varphi+\frac{i\omega}{c}\mathbf{A}=\frac{i\omega}{c}\left(\mathbf{A}+\frac{1}{k^2}\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{A}\right);\\ \mathbf{H}&=\frac{1}{\mu}\operatorname{rot}\mathbf{A}. \end{aligned} \tag{50}$$

Предположим теперь, что сторонние токи отсутствуют, а $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ — векторы, удовлетворяющие уравнениям Максвелла. Тогда векторы

$$\mathbf{E}'=-\frac{\mu^2\omega^2}{c^2k^2}\mathbf{H} \text{ и } \mathbf{H}'=\mathbf{E} \tag{51}$$

также удовлетворяют уравнениям Максвелла. Это дает возможность *при отсутствии сторонних токов* ввести два потенциала, называемых *векторами Герца.* Эти потенциалы взаимно находятся в отношениях симметрии, аналогичных выражаемым формулами (51).

Одним из векторов Герца является вектор

$$\mathbf{\Pi}=\frac{i\omega}{ck^2}\mathbf{A},$$

где $\mathbf{A}$ — векторный потенциал. Ввиду (48) и $\mathbf{j}^{(e)}=0$ он удовлетворяет уравнению

$$\Delta\mathbf{\Pi}+k^2\mathbf{\Pi}=0. \tag{52}$$

Из (50) следует, что векторы поля выражаются через этот вектор Герца соотношениями

$$\mathbf{E}=k^2\mathbf{\Pi}+\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{\Pi}, \quad \mathbf{H}=\frac{ck^2}{i\omega\mu}\operatorname{rot}\mathbf{\Pi}. \tag{53}$$

Но в силу соотношений взаимности (51) векторы

$$\mathbf{E}=\frac{i\omega\mu}{c}\operatorname{rot}\mathbf{\Pi} \quad \text{и} \quad \mathbf{H}=k^2\mathbf{\Pi}+\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{\Pi} \tag{54}$$

также удовлетворяют уравнениям Максвелла. Пусть теперь $\mathbf{\Pi}$ и $\mathbf{\Pi}^*$ — два вектора, удовлетворяющие уравнению (52). Образовав для первого из них векторы поля по формулам (53), а для второго — по формулам (54), и сложив полученные выражения, получим также два решения уравнений Максвелла:

$$\begin{gathered}\mathbf{E}=k^2\mathbf{\Pi}+\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{\Pi}+\frac{i\omega\mu}{c}\operatorname{rot}\mathbf{\Pi}^*;\\ \mathbf{H}=k^2\mathbf{\Pi}^*+\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{\Pi}^*+\frac{ck^2}{i\omega\mu}\operatorname{rot}\mathbf{\Pi}.\end{gathered} \tag{55}$$

Вектор $\mathbf{\Pi}^*$ представляет другой вектор Герца.

Вектор, используемый для образования векторов поля по формулам (53), называют *электрическим*, а по формулам (54) — *магнитным* вектором Герца. В зависимости от граничных условий оказывается удобным использовать либо один из векторов Герца, либо оба вместе.

ЗАДАЧИ

1. Показать, что при отсутствии сторонних токов скалярный потенциал φ удовлетворяет уравнению Гельмгольца

$$\Delta\varphi+k^2\varphi=0.$$

2. Найти электромагнитное поле, возбужденное в безграничном пространстве заданной системой стационарных токов $\mathbf{j}$.

Указание. Можно искать векторный потенциал поля. Частными решениями уравнений Гельмгольца, удовлетворяющими на бесконечности условиями излучения, являются *колебательные потенциалы* (§ 6 гл. XXIV). Следовательно, одно из решений нашей задачи может быть представлено в форме колебательного потенциала. Это решение единственно, так как если бы было два решения, то их разность удовлетворяла бы однородному уравнению Гельмгольца. Но решения однородного уравнения Гельмгольца описывают свободные поля, не содержащие источников. Поэтому решение, описывающее поле вынужденных колебаний, может быть только одно. Компоненты векторного потенциала, описывающего искомое поле, определяются формулами

$$A_\alpha=\frac{\mu}{c}\iiint\limits_V j_\alpha^{(e)}\frac{e^{ikr}}{r}\,dV.$$

3. Используя формулы (52) и (55) гл. XVIII, показать, что в цилиндрических координатах (r, φ, z) уравнения Максвелла (12)—(13) имеют вид:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial E_z}{\partial\varphi}-\frac{\partial E_\varphi}{\partial z}=\frac{i\omega\mu}{c}H_r,$$

$$\frac{\partial E_r}{\partial z}-\frac{\partial E_z}{\partial r}=\frac{i\omega\varepsilon}{c}H_\varphi,$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}rE_\varphi-\frac{1}{r}\frac{\partial E_r}{\partial\varphi}=\frac{i\omega\varepsilon}{c}H_z,$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial H_z}{\partial\varphi}-\frac{\partial E_\varphi}{\partial z}=\frac{4\pi\sigma-i\omega\varepsilon}{c}E_r+\frac{4\pi}{c}j_r^{(e)},$$

$$\frac{\partial H_r}{\partial z} - \frac{\partial H_r}{\partial r} = \frac{4\pi\sigma - i\omega\varepsilon}{c} E_\varphi + \frac{4\pi}{c} i_\varphi^{(e)},$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} rH_\varphi - \frac{1}{r}\frac{\partial H_r}{\partial \varphi} = \frac{4\pi\sigma - i\omega\varepsilon}{c} E_z + \frac{4\pi}{c} j_z^{(e)}.$$

4. Показать, что в сферических координатах (r, θ, φ) уравнения Максвелла имеют вид:

$$\frac{1}{r\sin\theta}\left(\frac{\partial}{\partial\theta} E_\varphi \sin\theta - \frac{\partial E_\theta}{\partial\varphi}\right) = \frac{i\omega\mu}{c} H_r,$$

$$\frac{1}{r}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial E_r}{\partial\varphi} - \frac{\partial}{\partial r} rE_\varphi\right) = \frac{i\omega\mu}{c} H_\theta,$$

$$\frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r} rE_\theta - \frac{\partial E_r}{\partial\theta}\right) = \frac{i\omega\mu}{c} H_\varphi,$$

$$\frac{1}{r\sin\theta}\left(\frac{\partial}{\partial\theta} H_\varphi \sin\theta - \frac{\partial H_\theta}{\partial\varphi}\right) = \frac{4\pi\sigma - i\omega\varepsilon}{c} E_r + \frac{4\pi}{c} j_r^{(e)},$$

$$\frac{1}{r}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial H_r}{\partial\varphi} - \frac{\partial}{\partial r} rH_\varphi\right) = \frac{4\pi\sigma - i\omega\varepsilon}{c} E_\theta + \frac{4\pi}{c} j_\theta^{(e)},$$

$$\frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r} rH_\theta - \frac{\partial H_r}{\partial\theta}\right) = \frac{4\pi\sigma - i\omega\varepsilon}{c} E_\varphi + \frac{4\pi}{c} j_\varphi^{(e)}.$$

§ 7. Условия на бесконечности и граничные условия

Типичными для системы уравнений стационарного электромагнитного поля являются задачи, в которых электромагнитное поле ищется в бесконечной области, в то время как причиной возникновения и поддержания стационарного состояния поля являются процессы, происходящие в конечной части пространства. При последнем условии компоненты векторов поля, а также векторного потенциала, ввиду (45), (47) и (48), в окрестности бесконечно удаленной точки удовлетворяют однородному уравнению Гельмгольца и можно воспользоваться результатами § 5 гл. XXIV.

Если в окрестности бесконечно удаленной точки электропроводность среды конечна, то, ввиду (46), $\operatorname{Im} k^2 \neq 0$ и согласно § 5 гл. XXIV возможны два типа решений уравнения Гельмгольца: экспоненциально возрастающие и экспоненциально убывающие на бесконечности. При поставленных выше условиях физический смысл имеют только последние из них, из чего и вытекают требования к решению на бесконечности. Вообще достаточно потребовать не экспоненциального убывания решений, а только обращения в нуль на бесконечности (см., например, § 9).

Если же среда в окрестности бесконечно удаленной точки является диэлектриком, то $\sigma = 0$, $\operatorname{Im} k^2 = 0$ и согласно § 5 гл. XXIV наряду с решениями уравнения Гельмгольца, представляющими волны, уходящие на бесконечность, существуют решения, представляющие волны, идущие из бесконечности.