$$\frac{\partial H_r}{\partial z}-\frac{\partial H_r}{\partial r}=\frac{4\pi\sigma-i\omega\varepsilon}{c}E_\varphi+\frac{4\pi}{c}i_\varphi^{(e)},$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}rH_\varphi-\frac{1}{r}\frac{\partial H_r}{\partial \varphi}=\frac{4\pi\sigma-i\omega\varepsilon}{c}E_z+\frac{4\pi}{c}j_z^{(e)}.$$

4. Показать, что в сферических координатах (r, θ, φ) уравнения Максвелла имеют вид:

$$\frac{1}{r\sin\theta}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}E_\varphi\sin\theta-\frac{\partial E_\theta}{\partial\varphi}\right)=\frac{i\omega\mu}{c}H_r,$$

$$\frac{1}{r}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial E_r}{\partial\varphi}-\frac{\partial}{\partial r}rE_\varphi\right)=\frac{i\omega\mu}{c}H_\theta,$$

$$\frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r}rE_\theta-\frac{\partial E_r}{\partial\theta}\right)=\frac{i\omega\mu}{c}H_\varphi,$$

$$\frac{1}{r\sin\theta}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}H_\varphi\sin\theta-\frac{\partial H_\theta}{\partial\varphi}\right)=\frac{4\pi\sigma-i\omega\varepsilon}{c}E_r+\frac{4\pi}{c}j_r^{(e)},$$

$$\frac{1}{r}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial H_r}{\partial\varphi}-\frac{\partial}{\partial r}rH_\varphi\right)=\frac{4\pi\sigma-i\omega\varepsilon}{c}E_\theta+\frac{4\pi}{c}j_\theta^{(e)},$$

$$\frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r}rH_\theta-\frac{\partial H_r}{\partial\theta}\right)=\frac{4\pi\sigma-i\omega\varepsilon}{c}E_\varphi+\frac{4\pi}{c}j_\varphi^{(e)}.$$

§ 7. Условия на бесконечности и граничные условия

Типичными для системы уравнений стационарного электромагнитного поля являются задачи, в которых электромагнитное поле ищется в бесконечной области, в то время как причиной возникновения и поддержания стационарного состояния поля являются процессы, происходящие в конечной части пространства. При последнем условии компоненты векторов поля, а также векторного потенциала, ввиду (45), (47) и (48), в окрестности бесконечно удаленной точки удовлетворяют однородному уравнению Гельмгольца и можно воспользоваться результатами § 5 гл. XXIV.

Если в окрестности бесконечно удаленной точки электропроводность среды конечна, то, ввиду (46), $\operatorname{Im} k^2 \neq 0$ и согласно § 5 гл. XXIV возможны два типа решений уравнения Гельмгольца: экспоненциально возрастающие и экспоненциально убывающие на бесконечности. При поставленных выше условиях физический смысл имеют только последние из них, из чего и вытекают требования к решению на бесконечности. Вообще достаточно потребовать не экспоненциального убывания решений, а только обращения в нуль на бесконечности (см., например, § 9).

Если же среда в окрестности бесконечно удаленной точки является диэлектриком, то $\sigma=0$, $\operatorname{Im} k^2=0$ и согласно § 5 гл. XXIV наряду с решениями уравнения Гельмгольца, представляющими волны, уходящие на бесконечность, существуют решения, представляющие волны, идущие из бесконечности.

Чтобы исключить эти последние, как не имеющие физического смысла, необходимо и достаточно, чтобы решение удовлетворяло условию излучения (62) гл. XXIV для каждой из компонент векторов поля (или векторного потенциала).

Условие излучения в форме (70) гл. XXIV охватывает оба случая: $\operatorname{Im} k^2 \neq 0$ и $\operatorname{Im} k^2 = 0$.

Перейдем к граничным условиям на поверхностях, разделяющих среды с разными свойствами.

Будем считать, что скачкообразный переход свойств одной среды в свойства другой является предельным случаем *непрерывного перехода*, при котором свойства одной среды переходят в свойства другой непрерывным образом в некоторой малой области, примыкающей к поверхности раздела. Самую поверхность раздела будем считать кусочно-гладкой. При этих предположениях для установления граничных условий могут быть использованы формулы Остроградского — Гаусса и Стокса.

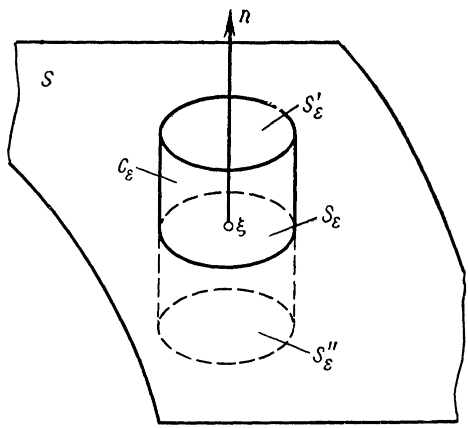

Рис. 50

Пусть S — поверхность раздела двух сред, о которых будем говорить как о среде e и среде i, и пусть ξ — точка на S, а n — внешняя нормаль к S в точке ξ. За положительное примем направление нормали n от среды i к среде e.

Построим цилиндрическую поверхность C с осью, совпадающей с нормалью n, и радиусом ah, где a — отвлеченное число, а h — произвольно выбранная единица длины. Пусть далее S' и S'' — поверхности, получаемые смещением поверхности S на расстояние a^2h соответственно в положительном и отрицательном направлении нормали n. Поверхности C, S' и S'' выделят некоторую замкнутую окрестность V_ε точки ξ с границей, образованной участками C_ε, S'_ε, S''_ε построенных поверхностей (рис. 50).

Применив в окрестности V_ε к векторам $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ формулу Остроградского — Гаусса, в силу уравнений (40) и (41), получим

$$\iint\limits_{C_\varepsilon + S'_\varepsilon + S''_\varepsilon} \left[i\omega\varepsilon - 4\pi\sigma) E_n - 4\pi j_n^{(e)} \right] dS = 0,$$

$$\iint\limits_{C_\varepsilon + S'_\varepsilon + S''_\varepsilon} \mu H_n dS = 0.$$

Символы E_n, H_n и $j_n^{(e)}$ означают проекции векторов $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$ и $\mathbf{j}^{(e)}$ на нормали к элементам dS поверхностей C_ε, S'_ε и S''_ε. При стремлении числа a к нулю для площадей c_ε, s'_ε и s''_ε участков C_ε, S'_ε и S''_ε получим следующие оценки:

$$c_\varepsilon \approx (2\pi a h)\, 2a^2h^2 = 4\pi a^3 h^3,$$
$$s'_\varepsilon = s''_\varepsilon = s_\varepsilon \geqslant \pi a^2 h^2.$$

Применив к интегралу от $[(i\omega\varepsilon - 4\pi\sigma) E_n - 4\pi j_n^{(e)}]$ теорему о среднем, получим

$$\iint\limits_{C_\varepsilon + S'_\varepsilon + S''_\varepsilon} [(i\omega\varepsilon - 4\pi\sigma) E_n - 4\pi j_n^{(e)}]\, dS = c_\varepsilon\, [(i\omega\varepsilon - 4\pi\sigma]\, E_n - 4\pi j_n^{(e)}]_{\text{ср} C_\varepsilon} +$$
$$+ s'_\varepsilon \left[(i\omega\varepsilon - 4\pi\sigma)\, E_n - 4\pi j_n^{(e)}\right]_{\text{ср}\, S'_\varepsilon} + s''_\varepsilon \left[(i\omega\varepsilon - 4\pi\sigma)\, E_n - 4\pi j_n^{(e)}\right]_{\text{ср}\, S''_\varepsilon},$$

где знаки срC_ε, срS'_ε, срS''_ε означают, что должно быть взято значение выражения, стоящего в квадратных скобках, лежащее между его максимальным и минимальным значениями соответственно на C_ε, S'_ε и S''_ε. Устремив a к нулю и используя полученные оценки, найдем, что

$$\lim_{a \to 0} \frac{1}{s_\varepsilon} \iint\limits_{C_\varepsilon + S'_\varepsilon + S''_\varepsilon} [(i\omega\varepsilon - 4\pi\sigma)\, E_n - 4\pi j_n^{(e)}]\, dS =$$
$$= [(i\omega\varepsilon_e - 4\pi\sigma_e)\, E_{ne} - 4\pi j_{ne}^{(e)}] - [(i\omega\varepsilon_i - 4\pi\sigma_i)\, E_{ni} - 4\pi j_{ni}^{(e)}],$$

где значками e и i отмечены предельные значения величин при приближении к точке ξ соответственно со стороны среды e и среды i. Знак минус при $[(i\omega\varepsilon_i - 4\pi\sigma_i)\, E_{ni} - 4\pi j_{ni}^{(e)}]$ связан с тем, что внешняя нормаль к участку S''_ε направлена в сторону, противоположную внешней нормали к S. Аналогичное соотношение получается и для нормальных компонент вектора $\mathbf{H}$ с тем лишь отличием, что величина $(i\omega\varepsilon - 4\pi\sigma)$ заменяется на μ, а член, зависящий от плотности тока, отсутствует.

Таким образом, придем к следующим граничным условиям для нормальных компонент векторов поля:

$$\begin{gathered} (i\omega\varepsilon_e - 4\pi\sigma_e)\, E_{ne} - (i\omega\varepsilon_i - 4\pi\sigma_i)\, E_{ni} = 4\pi\, (j_{ne}^{(e)} - j_{ni}^{(e)}), \\ \mu_e H_{ne} - \mu_i H_{ni} = 0. \end{gathered} \tag{56}$$

Обратим внимание на первое из них. В его правой части стоит разность нормальных компонент плотности тока. Отличие ее от нуля указывает на различие между притоком зарядов к поверхности раздела и оттоком от нее. Так как каждая из рассматриваемых нами величин представляет комплексную амплитуду колебаний, происходящих с частотой ω, то это различие между притоком и оттоком означает, что происходит периодическое колебание заряда на поверхности раздела, т. е. на этой последней располагается простой колебательный электрический слой.

Чтобы получить граничные условия для касательных компонент электрического и магнитного векторов, рассмотрим контур L, образованный линиями пересечения произвольной плоскости Σ, проходящей через нормаль n в точке ξ, с участками C_ε, S'_ε, S''_ε (рис. 51). Пусть Σ_L — участок указанной плоскости, ограниченный контуром L. Для упрощения дальнейших выкладок введем прямоугольную систему декартовых координат с началом в точке ξ и осями n, τ и b, где n — указанная выше нормаль, τ — ось, направленная по касательной к поверхности раздела, лежащей в плоскости Σ, а ось b направлена так, чтобы система координат n, τ, b была правая.

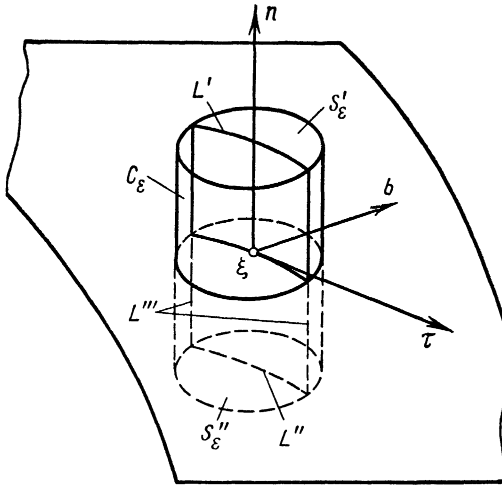

Рис. 51

Записав уравнения Максвелла (40) и (41) в компонентах по осям b, n, τ, получим систему из шести уравнений для компонент. Возьмем из этой системы два уравнения:

$$\frac{\partial E_\tau}{\partial n}-\frac{\partial E_n}{\partial \tau}=\frac{i\omega\mu}{c}H_b,$$
$$\frac{\partial H_\tau}{\partial n}-\frac{\partial H_n}{\partial \tau}=\frac{4\pi\sigma-i\omega\varepsilon}{c}E_b+\frac{4\pi}{c}j_b^{(e)}. \qquad (57)$$

Проинтегрируем второе из этих уравнений по площадке Σ_L:

$$\iint\limits_{\Sigma_L}\left(\frac{\partial H_\tau}{\partial n}-\frac{\partial H_n}{\partial \tau}\right)d\Sigma=\iint\limits_{\Sigma_L}\left(\frac{4\pi\sigma-i\omega\varepsilon}{c}E_b+\frac{4\pi}{c}j_b^{(e)}\right)d\Sigma. \qquad (58)$$

Так как ось τ перпендикулярна плоской площадке Σ_L, левую часть последнего соотношения можно преобразовать с помощью формулы Стокса для плоской области *, что даст

$$\iint\limits_{\Sigma_L}\left(\frac{\partial H_\tau}{\partial n}-\frac{\partial H_n}{\partial \tau}\right)d\Sigma=\int\limits_L[H_n\cos(l,\ n)+H_\tau\cos(l,\ \tau)]\,dL. \qquad (59)$$

* См. В. И. Смирнов [1], т. II, п. 70.

Контур L разобьем на части L', L'' и L''', образуемые пересечением секущей плоскости Σ соответственно с участками S'_ε, S''_ε и цилиндрической поверхностью C_ε (см. рис. 51). Площадку Σ_L разобьем на две части Σ_{Le} и Σ_{Li}, из которых одна лежит в среде e, а другая в среде i. Вспомнив, что участки S'_ε и S''_ε по условию отстоят от поверхности раздела сред на расстояние a^2h, и устремив радиус ah рассматриваемого цилиндра к нулю, получим следующие оценки:

$$\sigma_{Le}=\sigma_{Li}=2a^3h^2,\ \overline{L}'=\overline{L}''\simeq 2ah,\ \overline{L}'''=4a^2h; \text{ на } L' \text{ и } L''\ \cos(l,\, n)\approx 0,$$

где σ_{Le} и σ_{Li} — площадки участков Σ_{Le} и Σ_{Li}, а $\overline{L}'$, $\overline{L}''$ и $\overline{L}'''$ — длины участков L', L'' и L'''. Кроме того, на L'' тождественно $\cos(l,\ b)=0$. Применив к соотношениям (58) и (59) теорему о среднем и используя найденные оценки, получим:

$$a^2h\left[\frac{4\pi\sigma-i\omega\varepsilon}{c}E_b+\frac{4\pi}{c}j_b^{(e)}\right]_{\text{ср}\,\Sigma_{Li}}+a^2h\left[\frac{4\pi\sigma-i\omega\varepsilon}{c}E_b+\frac{4\pi}{c}j_b^{(e)}\right]_{\text{ср}\,\Sigma_{Le}}=$$
$$=[H_\tau\cos(l,\,\tau)]_{\text{ср}\,L'}+[H_\tau\cos(l,\,\tau)]_{\text{ср}\,L''}+2ah\,[H_n\cos(l,\,n)]_{\text{ср}\,L'''},\qquad(60)$$

где, как и выше, значки ср Σ_{Li}, ср Σ_{Le}, ср L', ср L'', ср L''' означают, что должно быть взято значение выражения, стоящего в квадратных скобках, лежащее между его максимальным и минимальным значениями на соответствующем участке.

Если электропроводность σ обеих соприкасающихся сред ограничена, то и объемная плотность тока $j_b^{(e)}$ ограничена. Поэтому, осуществив в соотношении (60) предельный переход, придем к соотношению:

$$\lim_{a\to 0}\left\{[H_\tau\cos(l,\ \tau)]_{\text{ср}\,L'}+[H_\tau\cos(l,\ \tau)]_{\text{ср}\,L''}\right\}=0.\qquad(61)$$

Так как

$$\lim_{a\to 0}\cos(l,\ \tau)=\begin{cases}-1 & \text{на } L',\\ +1 & \text{на } L'',\end{cases}\quad \lim_{a\to 0}H_\tau=\begin{cases}H_{\tau e} & \text{на } L',\\ H_{\tau i} & \text{на } L'',\end{cases}$$

окончательно получим

$$H_{\tau e}=H_{\tau i}.$$

Совершенно аналогичным путем, используя первое из уравнений (57), найдем и граничное условие для тангенциальных компонент электрического вектора:

$$E_{\tau e}=E_{\tau i}.$$

Таким образом, мы нашли четыре граничных условия:

$$\begin{gathered}(i\omega\varepsilon_e-4\pi\sigma_e)\,E_{ne}-(i\omega\varepsilon_i-4\pi\sigma_i)\,E_{ni}=4\pi\,(j_{ne}^{(e)}-j_{ni}^{(e)}),\\ \mu_eH_{ne}=\mu_iH_{ni},\end{gathered}\qquad(62)$$

$$E_{\tau e}=E_{\tau i},\ \ H_{\tau e}=H_{\tau i}.\qquad(63)$$

Легко, однако, видеть, что выполнение последних двух условий для тангенциальных компонент автоматически влечет за собой выполнение и первых двух условий для нормальных компонент.

Чтобы убедиться в этом, воспользуемся введенной выше местной системой координат n, τ, b (см. рис. 51), где n — нормаль к границе раздела сред, а оси τ и b лежат в касательной плоскости к ней. Из уравнений Максвелла (40)—(41) следуют уравнения

$$\frac{\partial E_b}{\partial \tau} - \frac{\partial E_\tau}{\partial b} = \frac{i\omega\mu}{c} H_n,$$

$$\frac{\partial H_b}{\partial \tau} - \frac{\partial H_\tau}{\partial b} = \frac{4\pi\sigma - i\omega\varepsilon}{c} E_n + \frac{4\pi}{c} j_n^{(e)}.$$

В силу непрерывности тангенциальных компонент E_τ, E_b, H_τ, H_b правые части этих уравнений также меняются непрерывно при пересечении границы, откуда и следуют условия (62).

Так как электропроводность многих сред очень велика, весьма полезным является представление *о проводнике с бесконечно большой* электропроводностью. Такой проводник называют *идеальным.*

Опираясь на уравнения Максвелла, легко показать, что полное электромагнитное поле в проводнике затухает по мере углубления в проводник по показательному закону, причем показатель затухания пропорционален электропроводности (см., например, задачу к этому параграфу). Поэтому при пересечении границы идеального проводника поле должно обращаться в нуль. Это часто выражают, говоря, что «электромагнитное поле внутрь идеального проводника не проникает».

Этим обстоятельством воспользуемся, чтобы установить условия на границе идеального проводника. Обратимся к интегральному соотношению (58). Оценки членов этого соотношения, на основании которых мы пришли к граничному условию для тангенциальных компонент магнитного вектора, опирались на требование ограниченности векторов поля и плотности тока. Для идеального проводника последнее не имеет места и оценки для членов, зависящих от плотности тока, мы должны изменить.

Заметив, что по закону Ома компонента по оси b полной плотности тока равна

$$j_b = \sigma E_b + j_b^{(e)},$$

найдем, что

$$\iint\limits_{\Sigma_{Le}} \left(\frac{4\pi\sigma}{c} E_b + \frac{4\pi}{c} j_b^{(e)} \right) dS = \frac{4\pi}{c} \iint\limits_{\Sigma_{Le}} j_b \, dS.$$

Интеграл $\iint\limits_{\Sigma_{Le}} j_b \, dS$ представляет полный ток, текущий через часть Σ_{Le} площадки Σ_L, расположенную в среде e. По сказанному выше, электромагнитное поле, а с ним и полный ток, текущий по идеальному проводнику, концентрируются на его поверхности. Следовательно, при $\sigma \to \infty$ рассматриваемый интеграл стремится к линейному интегралу

$$\int\limits_{\tilde{L}} j'_b \, dL,$$

где $\tilde{L}$ — часть контура площадки Σ_{Le}, принадлежащая границе раздела сред (рис. 51), а j'_b — компонента поверхностной плотности тока $\mathbf{j}'$ по оси b. При $a \to 0$ интеграл $\int\limits_{\tilde{L}} j'_b \, dL$ имеет порядок $2ahj'_b$, вследствие чего, как легко видеть, вместо соотношения (61) придем к соотношению

$$\lim_{a \to 0} \{[H_\tau \cos(l, \tau)]_{\text{ср } L'} + [H_\tau \cos(l, \tau)]_{\text{ср } L''}\} = \frac{4\pi}{c} j'.$$

Приняв во внимание, что векторы поля в среде e равны нулю, и учтя соотношения (60), окончательно получим

$$H_{\tau i} = \frac{4\pi}{c} j'_b. \tag{64}$$

Это соотношение не накладывает никаких ограничений на решение, так как в правой его части стоит функция, не входящая в уравнения Максвелла. Наоборот, когда решение уравнений Максвелла найдено, соотношение (64) дает возможность определить *поверхностный ток*.

Вывод граничного условия для тангенциальных компонент электрического вектора имеет исходной точкой уравнения (57), не зависящие от плотности тока. Следовательно, как и для произвольной среды, для идеального проводника получим $E_{\tau e} = E_{\tau i}$. Но поскольку поле в идеальном проводнике равно нулю, то $E_{\tau e} = 0$ и это условие примет вид

$$E_{\tau i} = 0. \tag{65}$$

Таким образом, *на границе идеального проводника должно соблюдаться лишь одно условие, требующее обращения в нуль тангенциальной компоненты электрического вектора.*

ЗАДАЧА

Полупространство $x_1 > 0$ занято средой с электропроводностью σ. На границе $x_1 = 0$ задано значение электрического вектора, равное постоянному вектору E_0. Показать, что поле в среде с ростом x_1 затухает по показательному закону, причем коэффициент затухания пропорционален электропроводности σ.

Указание. Искомый электрический вектор удовлетворяет уравнению

$$\frac{d^2E}{dx_1^2} + k^2E = 0,$$

где

$$k^2 = \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\omega^2\left(1 + i\frac{4\pi\sigma}{\varepsilon\omega}\right).$$