§ 8. Представление электромагнитного поля с помощью двух скалярных функций

С помощью формул § 7 гл. XVIII легко показать, что в произвольных ортогональных криволинейных координатах ζ_1, ζ_2, ζ_3 уравнения Максвелла (40)—(41) имеют вид:

$$\frac{\partial}{\partial\zeta_\alpha} h_\beta E_\beta - \frac{\partial}{\partial\zeta_\beta} h_\alpha E_\alpha = \frac{i\omega\mu}{c} h_\alpha h_\beta H_\gamma, \tag{66}$$

$$\frac{\partial}{\partial\zeta_\alpha} h_\beta H_\beta - \frac{\partial}{\partial\zeta_\beta} h_\alpha H_\alpha = \frac{4\pi}{c} h_\alpha h_\beta j_\gamma^{(e)} + \frac{4\pi\sigma - i\omega\varepsilon}{c} h_\alpha h_\beta E_\gamma, \tag{67}$$

где h_α, h_β, h_γ — координатные параметры Ламе, а индексы α, β, γ принимают соответственно значения $\alpha = 1$, $\beta = 2$, $\gamma = 3$, а также значения, получаемые круговой перестановкой чисел 1, 2, 3.

Будем считать, что сторонние токи отсутствуют, т. е. что $j_\alpha^{(e)} = 0$ $(\alpha = 1, 2, 3)$. Для сокращения письма введем обозначения:

$$\frac{i\omega\mu}{c} = k_H, \quad \frac{4\pi\sigma - i\omega\varepsilon}{c} = k_E. \tag{68}$$

При этом уравнения (66)—(67) примут вид:

$$\frac{\partial}{\partial\zeta_\alpha} h_\beta E_\beta - \frac{\partial}{\partial\zeta_\beta} h_\alpha E_\alpha = k_H h_\alpha h_\beta H_\gamma, \tag{69}$$

$$\frac{\partial}{\partial\zeta_\alpha} h_\beta E_\beta - \frac{\partial}{\partial\zeta_\beta} h_\alpha H_\alpha = k_E h_\alpha h_\beta E_\gamma. \tag{70}$$

Предположим, что некоторая задача, поставленная для уравнений (69)—(70), допускает решения, при которых

$$E_l \neq 0, \quad H_l = 0, \tag{71}$$

или

$$E_l = 0, \quad H_l \neq 0, \tag{72}$$

где l — какой-либо индекс из числа индексов 1, 2, 3. Решения, удовлетворяющие условиям (71), будем называть *решениями электрического типа*, а условиям (72) — *решениями магнитного типа*.

Для решений электрического типа из уравнений (69) при $\gamma = l$ следует, что

$$\frac{\partial}{\partial\zeta_j} h_k E_k = \frac{\partial}{\partial\zeta_k} h_j E_j, \tag{73}$$

где индексы j, k вместе с индексом l образуют некоторую четную перестановку j, k, l индексов 1, 2, 3. В отличие от греческих индексов α, β, γ, которые могут означать *любую* четную перестановку индексов 1, 2, 3, все три индекса j, k, l мы предполагаем *фиксированными*.

Из соотношения (73) вытекает, что компоненты E_j и E_k электрического вектора могут быть представлены в виде

$$E_j = \frac{1}{h_j}\frac{\partial u^*}{\partial\zeta_j}, \quad E_k = \frac{1}{h_k}\frac{\partial u^*}{\partial\zeta_k}, \tag{74}$$

где u^* — некоторая функция. Подставив эти выражения в уравнения (70) при $\gamma = j, k$ и приняв во внимание, что $H_l = 0$, получим

$$\frac{\partial}{\partial \zeta_l} h_k H_k = -k_E \frac{h_k h_l}{h_j} \frac{\partial u^*}{\partial \zeta_j}, \quad \frac{\partial}{\partial \zeta_l} h_j H_j = k_E \frac{h_l h_j}{h_k} \frac{\partial u^*}{\partial \zeta_k}. \tag{75}$$

Предположим, что коэффициенты h_1, h_2, h_3 представимы в виде

$$h_j = \psi_j(\zeta_j, \zeta_l)\,\psi(\zeta_k), \quad h_k = \psi_k(\zeta_j, \zeta_k)\,\psi(\zeta_l), \quad h_l = 1. \tag{76}$$

Тогда, положив

$$u^* = \frac{\partial u}{\partial \zeta_l},$$

$$H_k = -\frac{k_E}{h_j} \frac{\partial u}{\partial \zeta_j}, \quad H_j = \frac{k_E}{h_k} \frac{\partial u}{\partial \zeta_k}, \tag{77}$$

где u — некоторая функция, мы тождественно удовлетворим уравнениям (75). Подставив выражения (77) для H_k и H_j в то из уравнений (70), для которого $\gamma = l$, получим

$$E_l = -\frac{1}{h_j h_k} \left[\frac{\partial}{\partial \zeta_j} \left(\frac{h_k}{h_j} \frac{\partial u}{\partial \zeta_j} \right) + \frac{\partial}{\partial \zeta_k} \left(\frac{h_j}{h_k} \frac{\partial u}{\partial \zeta_k} \right) \right]. \tag{78}$$

Наконец, в силу соотношений (74), найдем, что

$$E_j = \frac{1}{h_j} \frac{\partial^2 u}{\partial \zeta_j \partial \zeta_l}, \quad E_k = \frac{1}{h_k} \frac{\partial^2 u}{\partial \zeta_k \partial \zeta_l}. \tag{79}$$

Таким образом, с помощью четырех уравнений из шести уравнений (69)—(70), все компоненты векторов поля для решения электрического типа выражены нами через некоторую функцию u.

Подставив найденные выражения компонент векторов поля в те из уравнений (69), для которых $\gamma = j, k$, получим:

$$\frac{\partial}{\partial \zeta_k} \left\{ \frac{1}{h_j h_k} \left[\frac{\partial}{\partial \zeta_j} \left(\frac{h_k}{h_j} \frac{\partial u}{\partial \zeta_j} \right) + \frac{\partial}{\partial \zeta_k} \left(\frac{h_j}{h_k} \frac{\partial u}{\partial \zeta_k} \right) \right] + \frac{\partial^2 u}{\partial \zeta_l^2} \right\} = -k_H k_E \frac{\partial u}{\partial \zeta_k},$$

$$\frac{\partial}{\partial \zeta_j} \left\{ \frac{\partial^2 u}{\partial \zeta_l^2} + \frac{1}{h_j h_k} \left[\frac{\partial}{\partial \zeta_j} \left(\frac{h_k}{h_j} \frac{\partial u}{\partial \zeta_j} \right) + \frac{\partial}{\partial \zeta_k} \left(\frac{h_j}{h_k} \frac{\partial u}{\partial \zeta_k} \right) \right] \right\} = -k_H k_E \frac{\partial u}{\partial \zeta_j}.$$

Оба эти уравнения могут быть получены путем дифференцирования уравнения

$$\frac{1}{h_j h_k} \left[\frac{\partial}{\partial \zeta_j} \left(\frac{h_k}{h_j} \frac{\partial u}{\partial \zeta_j} \right) + \frac{\partial}{\partial \zeta_k} \left(\frac{h_j}{h_k} \frac{\partial u}{\partial \zeta_k} \right) \right] + \frac{\partial^2 u}{\partial \zeta_l^2} + k^2 u = 0, \tag{80}$$

где

$$k^2 \equiv k_H k_E = \frac{\omega^2 \varepsilon \mu + 4\pi i \omega \mu \sigma}{c^2}, \tag{81}$$

и, следовательно, удовлетворяются, если функция u является решением уравнения (80). Тем самым мы видим, что надлежаще выбрав функцию u, можно построить выражения векторов поля, удовлетворяющие всем уравнениям Максвелла.

Собрав воедино выражения (77)—(79) компонент векторов поля для решений электрического типа и приняв во внимание уравнение (80), можем записать:

$$E_j=\frac{1}{h_j}\frac{\partial^2 u}{\partial\zeta_j\partial\zeta_l},\quad E_k=\frac{1}{h_k}\frac{\partial^2 u}{\partial\zeta_k\partial\zeta_l},\quad E_l=\frac{\partial^2 u}{\partial\zeta_l^2}+k^2u, \tag{82}$$

$$H_j=\frac{4\pi\sigma-i\omega\varepsilon}{c}\frac{1}{h_k}\frac{\partial u}{\partial\zeta_k},\quad H_k=-\frac{4\pi\sigma-i\omega\varepsilon}{c}\frac{1}{h_j}\frac{\partial u}{\partial\zeta_j},\quad H_l=0. \tag{83}$$

Исследовав подобным же образом решения магнитного типа, мы пришли бы к соотношениям:

$$H_j=\frac{1}{h_j}\frac{\partial^2 v}{\partial\zeta_j\partial\zeta_l},\quad H_k=\frac{1}{h_k}\frac{\partial^2 v}{\partial\zeta_k\partial\zeta_l},\quad H_l=\frac{\partial^2 v}{\partial\zeta_l^2}+k^2v; \tag{84}$$

$$E_j=\frac{i\omega\mu}{c}\frac{1}{h_k}\frac{\partial v}{\partial\zeta_k},\quad E_k=-\frac{i\omega\mu}{c}\frac{1}{h_j}\frac{\partial v}{\partial\zeta_j},\quad E_l=0, \tag{85}$$

где v—функция, также удовлетворяющая уравнению (80).

Таким образом, если рассматриваемая задача для уравнений Максвелла допускает представление решения в виде наложения решений электрического и магнитного типов, то для отыскания каждого из них *достаточно найти одну скалярную функцию*, которая является решением уравнения (80) при граничных условиях, обеспечивающих выполнение граничных условий для векторов поля. Если такая функция найдена, то векторы поля могут быть определены по формулам (82)—(83) или (84)—(85).

Выполнение соотношений (76) является необходимым условием существования решений электрического и магнитного типов. Можно показать, что эти условия в ортогональных системах координат выполняются по любой координате ζ_l, для которой координатными поверхностями служат либо *параллельные плоскости* либо *концентричные сферические поверхности*. Эти типы координат, однако, и исчерпывают все случаи выполнения соотношений (76).

Примерами координат, удовлетворяющих соотношениям (76), являются ортогональные декартовы координаты (в качестве ζ_l можно выбрать любую из координат), цилиндрические координаты r, φ, z при $\zeta_l=z$, сферические координаты r, θ, φ при $\zeta_l=r$.

Рассмотрим, например, сферические координаты. Для них:

$$h_r=1,\quad h_\theta=r,\quad h_\varphi=r\sin\theta$$

и соотношения (76) удовлетворяются при $\zeta_l=r$. Положим

$$r=\zeta_l,\ \theta=\zeta_j,\ \varphi=\zeta_k.$$

При этом уравнение (80) примет вид:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}+k^2u=0.$$

С помощью подстановки:

$$u \equiv r\bar{u}$$

оно может быть приведено к уравнению Гельмгольца:

$$\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial \bar{u}}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta \frac{\partial \bar{u}}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta}\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \varphi^2} + k^2 \bar{u} = 0.$$

Зная решения $\bar{u}$ и $\bar{v}$ последнего уравнения, подчиненные условиям, которые обеспечивают выполнение граничных условий для решений соответственно электрического и магнитного типа, можно найти все векторы поля с помощью формул, очевидным образом вытекающих из формул (82)—(85). Функции $\bar{u}$ и $\bar{v}$ получили название *потенциалов Дебая.*

ЗАДАЧИ

1. Предположив, что параметры Ламе h_j, h_k и h_l системы координат ζ_j, ζ_k, ζ_l не зависят от ζ_l, рассмотреть электромагнитное поле в пустоте, также не зависящее от координаты ζ_l. Показать, что векторы поля могут быть вычислены по формулам:

$$E_j = -\frac{c}{i\omega}\frac{1}{h_k h_l}\frac{\partial u^*}{\partial \zeta_k}, \quad E_k = \frac{c}{i\omega}\frac{1}{h_j h_l}\frac{\partial u^*}{\partial \zeta_j}, \quad E_l = \frac{1}{h_l} v^*,$$

$$H_j = \frac{c}{i\omega}\frac{1}{h_k h_l}\frac{\partial v^*}{\partial \zeta_k}, \quad H_k = -\frac{c}{i\omega}\frac{1}{h_j h_l}\frac{\partial v^*}{\partial \zeta_j}, \quad H_l = \frac{1}{h_l} u^*,$$

где u^* и v^*—функции, удовлетворяющие уравнению

$$\frac{\partial}{\partial \zeta_j}\left(\frac{h_k}{h_j h_l}\frac{\partial u}{\partial \zeta_j}\right) + \frac{\partial}{\partial \zeta_k}\left(\frac{h_j}{h_k h_l}\frac{\partial u}{\partial \zeta_k}\right) + \frac{\omega^2}{c^2}\frac{h_j h_k}{h_l} u = 0.$$

Замечание. Функции u^* и v^* называют *потенциалами Абрагама.* Рассмотренный в этой задаче случай является единственным, кроме рассмотренного выше, когда электромагнитное поле может быть представлено с помощью двух скалярных функций.

2. Показать, что к числу координатных систем, рассмотренных в предыдущей задаче, принадлежат системы, обладающие симметрией вращения относительно одной из координатных осей (например, цилиндрические или сферические координаты).

3. Показать, что в декартовых и цилиндрических координатах решения уравнений Максвелла электрического и магнитного типа могут быть представлены с помощью соответственно электрического и магнитного векторов Герца, у каждого из которых лишь одна компонента Π_3 и Π_3^* или Π_z и Π_z^* отлична от нуля. Показать далее, что можно положить: Π_3 (или Π_z) $= u$, Π_3^* (или Π_z^*) $= v$, где u и v—функции, определенные в тексте параграфа.

§ 9. Теорема единственности

Рассмотрим имеющий большое принципиальное значение вопрос о единственности решений системы уравнений Максвелла.

Пусть S—замкнутая поверхность, разделяющая две среды i и e, заполняющие соответственно конечную область V_i, рас-