С помощью подстановки:

$$u \equiv r\bar{u}$$

оно может быть приведено к уравнению Гельмгольца:

$$\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial \bar{u}}{\partial r}+\frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial \bar{u}}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\bar{u}}{\partial\varphi^2}+k^2\bar{u}=0.$$

Зная решения $\bar{u}$ и $\bar{v}$ последнего уравнения, подчиненные условиям, которые обеспечивают выполнение граничных условий для решений соответственно электрического и магнитного типа, можно найти все векторы поля с помощью формул, очевидным образом вытекающих из формул (82)—(85). Функции $\bar{u}$ и $\bar{v}$ получили название *потенциалов Дебая.*

ЗАДАЧИ

1. Предположив, что параметры Ламе h_j, h_k и h_l системы координат ζ_j, ζ_k, ζ_l не зависят от ζ_l, рассмотреть электромагнитное поле в пустоте, также не зависящее от координаты ζ_l. Показать, что векторы поля могут быть вычислены по формулам:

$$E_j=-\frac{c}{i\omega}\frac{1}{h_k h_l}\frac{\partial u^*}{\partial\zeta_k},\quad E_k=\frac{c}{i\omega}\frac{1}{h_j h_l}\frac{\partial u^*}{\partial\zeta_j},\quad E_l=\frac{1}{h_l}v^*,$$

$$H_j=\frac{c}{i\omega}\frac{1}{h_k h_l}\frac{\partial v^*}{\partial\zeta_k},\quad H_k=-\frac{c}{i\omega}\frac{1}{h_j h_l}\frac{\partial v^*}{\partial\zeta_j},\quad H_l=\frac{1}{h_l}u^*,$$

где u^* и v^*—функции, удовлетворяющие уравнению

$$\frac{\partial}{\partial\zeta_j}\left(\frac{h_k}{h_j h_l}\frac{\partial u}{\partial\zeta_j}\right)+\frac{\partial}{\partial\zeta_k}\left(\frac{h_j}{h_k h_l}\frac{\partial u}{\partial\zeta_k}\right)+\frac{\omega^2}{c^2}\frac{h_j h_k}{h_l}u=0.$$

Замечание. Функции u^* и v^* называют *потенциалами Абрагама.* Рассмотренный в этой задаче случай является единственным, кроме рассмотренного выше, когда электромагнитное поле может быть представлено с помощью двух скалярных функций.

2. Показать, что к числу координатных систем, рассмотренных в предыдущей задаче, принадлежат системы, обладающие симметрией вращения относительно одной из координатных осей (например, цилиндрические или сферические координаты).

3. Показать, что в декартовых и цилиндрических координатах решения уравнений Максвелла электрического и магнитного типа могут быть представлены с помощью соответственно электрического и магнитного векторов Герца, у каждого из которых лишь одна компонента Π_3 и Π_3^* или Π_z и Π_z^* отлична от нуля. Показать далее, что можно положить: Π_3 (или Π_z) $=u$, Π_3^* (или Π_z^*) $=v$, где u и v—функции, определенные в тексте параграфа.

§ 9. Теорема единственности

Рассмотрим имеющий большое принципиальное значение вопрос о единственности решений системы уравнений Максвелла.

Пусть S—замкнутая поверхность, разделяющая две среды i и e, заполняющие соответственно конечную область V_i, расположенную внутри S, и бесконечную область V_e, расположенную вне S. На границе S будем считать выполненными *условия сопряжения тангенциальных компонент векторов поля:*

$$\begin{aligned} E_{\tau_i} - E_{\tau_e} &= 0, \\ H_{\tau_i} - H_{\tau_e} &= 0. \end{aligned} \tag{86}$$

Далее будем считать, что выполняется *условие излучения*, при $r \to \infty$:

$$r\left(\frac{\partial E_\alpha}{\partial r} - ik_e E_\alpha\right) \to 0, \quad r\left(\frac{\partial H_\alpha}{\partial r} - ik_e H_\alpha\right) \to 0, \quad E_\alpha \to 0, \quad H_\alpha \to 0, \tag{87}$$
$$\alpha = 1,\ 2,\ 3,$$

где k_e — квадратный корень с положительной вещественной частью из выражения

$$k_e^2 = \frac{\omega^2 \varepsilon_e \mu_e - 4\pi i \omega \mu_e \sigma_e}{c^2}.$$

Входящие в последнее выражение величины отмечены индексами e, поскольку бесконечно удаленная точка принадлежит среде e. В дальнейшем индексы при обозначениях величин будем вводить только тогда, когда необходимо подчеркнуть, что данная величина относится к определенной среде.

Наконец, будем считать, что электропроводность среды i

$$\sigma_i \neq 0. \tag{88}$$

При указанных достаточно общих условиях имеет место

Теорема единственности. *Решение системы уравнений Максвелла (40)—(41), удовлетворяющее граничным условиям (86) и условиям излучения (87), при условии (88) единственно.*

Для доказательства теоремы предположим, что существует два решения, т. е. две системы векторов поля $\mathbf{E}^{(1)}$, $\mathbf{H}^{(1)}$ и $\mathbf{E}^{(2)}$, $\mathbf{H}^{(2)}$, удовлетворяющих требованиям теоремы. В этом случае разности

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}^{(1)} - \mathbf{E}^{(2)}, \quad \mathbf{H} = \mathbf{H}^{(1)} - \mathbf{H}^{(2)},$$

очевидно, будут удовлетворять однородной системе уравнений Максвелла:

$$\frac{\partial E_\gamma}{\partial x_\beta} - \frac{\partial E_\beta}{\partial x_\gamma} = \frac{i\omega\mu}{c} H_\alpha, \tag{89}$$

$$\frac{\partial H_\gamma}{\partial x_\beta} - \frac{\partial H_\beta}{\partial x_\gamma} = \frac{4\pi\sigma - i\omega\varepsilon}{c} E_\alpha, \tag{90}$$

граничным условиям (86) и условию излучения (87) на бесконечности. Теорема будет доказана, если показать, что векторы $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$, удовлетворяющие перечисленным условиям, тождественно равны нулю во всем пространстве.

Рассмотрим выражение

$$m \equiv \frac{4\pi\sigma - i\omega\varepsilon}{c} |\mathbf{E}|^2 + \frac{i\omega\mu}{c} |\mathbf{H}|^2 \tag{91}$$

и выражение, комплексно сопряженное ему,

$$m^* \equiv \frac{4\pi\sigma + i\omega\varepsilon}{c} |\mathbf{E}|^2 - \frac{i\omega\mu}{c} |\mathbf{H}|^2. \tag{92}$$

Звездочкой будем отмечать величины, комплексно сопряженные величинам, обозначаемым тем же символом без звездочки. Сумма

$$m + m^* = \frac{4\pi\sigma}{c} |\mathbf{E}|^2 \geqslant 0. \tag{93}$$

Раскроем выражение для квадратов модулей векторов поля. По определению

$$|\mathbf{E}|^2 = \sum_{\alpha=1}^{3} E_\alpha E_\alpha^*.$$

В силу соотношения (90):

$$E_\alpha = \frac{c}{4\pi\sigma - i\omega\varepsilon} \left(\frac{\partial H_\gamma}{\partial x_\beta} - \frac{\partial H_\beta}{\partial x_\gamma} \right),$$

откуда

$$|\mathbf{E}|^2 = \frac{c}{4\pi\sigma - i\omega\varepsilon} \sum_{\bigcirc} E_\alpha^* \left(\frac{\partial H_\gamma}{\partial x_\beta} - \frac{\partial H_\beta}{\partial x_\gamma} \right) = \frac{c}{4\pi\sigma + i\omega\varepsilon} \sum_{\bigcirc} E_\alpha \left(\frac{\partial H_\gamma^*}{\partial x_\beta} - \frac{\partial H_\beta^*}{\partial x_\gamma} \right),$$

где значок $\bigcirc$ означает, что суммируемые члены получаются один из другого *круговой перестановкой индексов* α, β, γ. Аналогичным путем, используя уравнения (90), найдем, что

$$|\mathbf{H}|^2 = \frac{c}{i\omega\mu} \sum_{\bigcirc} H_\alpha^* \left(\frac{\partial E_\gamma}{\partial x_\beta} - \frac{\partial E_\beta}{\partial x_\gamma} \right) = -\frac{c}{i\omega\mu} \sum_{\bigcirc} H_\alpha \left(\frac{\partial E_\gamma^*}{\partial x_\beta} - \frac{\partial E_\beta^*}{\partial x_\gamma} \right).$$

Подставив найденные выражения в выражение (92), получим:

$$m^* = \sum_{\bigcirc} \left[E_\alpha \left(\frac{\partial H_\gamma^*}{\partial x_\beta} - \frac{\partial H_\beta^*}{\partial x_\gamma} \right) - H_\alpha^* \left(\frac{\partial E_\gamma}{\partial x_\beta} - \frac{\partial E_\beta}{\partial x_\gamma} \right) \right] =$$

$$= \sum_{\bigcirc} \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(H_\beta^* E_\gamma - H_\gamma^* E_\beta \right),$$

откуда очевидно, что

$$m + m^* = \sum_{\bigcirc} \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left[\left(H_\beta E_\gamma^* - H_\beta E_\beta^* \right) + \left(H_\beta^* E_\gamma - H_\gamma^* E_\beta \right) \right].$$

Пусть Σ — шаровая поверхность настолько большого радиуса r, что область V_i лежит внутри нее. Легко видеть, что в силу граничных условий (86), нормальная составляющая вектора $\mathbf{T}$ с компонентами

$$T_\alpha = (H_\beta E_\gamma^* - H_\gamma E_\beta^*) + (H_\beta^* E_\gamma - H_\gamma^* E_\beta) \tag{94}$$

изменяется непрерывно при пересечении поверхности раздела S. Действительно, пусть для простоты ось x_α перпендикулярна S. Нормальная составляющая T_n вектора $\mathbf{T}$ равна в этом случае T_α, а определяющие ее величины E_β, E_γ, H_β и H_γ являются компонентами тангенциальных составляющих векторов поля и, следовательно, непрерывны. А поэтому непрерывна и интересующая нас нормальная составляющая.

В силу доказанной непрерывности нормальной составляющей вектора $\mathbf{T}$ при пересечении S, во всей области V_Σ, лежащей внутри Σ, к функции

$$m + m^* = \sum_{\alpha=1}^{3} \frac{\partial T_\alpha}{\partial x_\alpha}$$

можно применить формулу Остроградского—Гаусса, что, в силу соотношения (93), даст

$$\iiint\limits_{V_\Sigma} \frac{4\pi\sigma}{c} |\mathbf{E}|^2 \, dV = \iint\limits_{\Sigma} T_n \, dS. \tag{95}$$

Введем сферические координаты (r, θ, φ) с началом в центре, из которого описана шаровая поверхность Σ. На Σ:

$$T_n = T_r = (H_\theta E_\varphi^* - H_\varphi E_\theta^*) + (H_\theta^* E_\varphi - H_\varphi^* E_\theta). \tag{96}$$

Пользуясь уравнениями Максвелла в сферических координатах (задача 4 к § 6), получим:

$$H_\theta = \frac{c}{i\omega\mu}\left[\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial E_r}{\partial\varphi} - \frac{1}{r}E_\varphi - \frac{\partial E_\varphi}{\partial r}\right] \equiv$$

$$\equiv \frac{c}{i\omega\mu}\frac{1}{r}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial E_r}{\partial\varphi} - E_\varphi - r\left(\frac{\partial E_\varphi}{\partial r} - ikE_\varphi\right)\right] - \frac{ck}{\omega\mu}E_\varphi,$$

$$H_\varphi = \frac{c}{i\omega\mu}\left[\frac{1}{r}E_\theta + \frac{\partial E_\theta}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial E_r}{\partial\theta}\right] \equiv$$

$$\equiv \frac{c}{i\omega\mu}\frac{1}{r}\left[E_\theta - \frac{\partial E_r}{\partial\theta} + r\left(\frac{\partial E_\theta}{\partial r} - ikE_\theta\right)\right] + \frac{ck}{\omega\mu}E_\theta.$$

Оценим порядок членов в правых частях этих уравнений при $r \to \infty$. В силу условия излучения (87), при $r \to \infty$

$$E_r \to 0,\ E_\theta \to 0,\ E_\varphi \to 0,\ r\left(\frac{\partial E_\varphi}{\partial r} - ikE_\varphi\right) \to 0,\ r\left(\frac{\partial E_\theta}{\partial r} - ikE_\theta\right) \to 0,$$

поэтому члены, содержащие множитель $\frac{1}{r}$, стремятся к нулю быстрее $\frac{1}{r}$. Отсюда следует, что

$$\left.\begin{aligned} H_\theta &= -\frac{ck}{\omega\mu} E_\varphi + o\left(\frac{1}{r}\right), \\ H_\varphi &= \frac{ck}{\omega\mu} E_\theta + o\left(\frac{1}{r}\right), \end{aligned}\right\} \tag{97}$$

где $o\left(\frac{1}{r}\right)$ означает совокупность членов более высокого порядка малости, чем $\frac{1}{r}$. Подставив эти выражения в формулу (96), получим

$$T_n = -\frac{ck}{\omega\mu}(E_\theta E_\theta^* + E_\varphi E_\varphi^*) - \frac{ck^*}{\omega\mu}(E_\theta E_\theta^* + E_\varphi E_\varphi^*) + o\left(\frac{1}{r^2}\right) =$$
$$= -\frac{2c \operatorname{Re} k}{\omega\mu}(|E_\theta|^2 + |E_\varphi|^2) + o\left(\frac{1}{r^2}\right),$$

где $o\left(\frac{1}{r^2}\right)$ означает совокупность членов порядка более высокого, чем $\frac{1}{r^2}$. Из соотношения (95) теперь вытекает, что

$$\iiint\limits_{V_i} \frac{4\pi\sigma_i}{c} |\mathbf{E}|^2 dV + \iiint\limits_{V_e} \frac{4\pi\sigma_e}{c} |\mathbf{E}|^2 dV +$$
$$+ \frac{2c \operatorname{Re} k}{\omega\mu_e} \lim_{r\to\infty} \iint\limits_{\Sigma} (|E_\theta|^2 + |E_\varphi|^2)\, dS = 0.$$

Так как все члены этого уравнения неотрицательны, то нулю равен каждый из них, а поскольку и подынтегральные выражения неотрицательны, то должно быть

$$\frac{4\pi\sigma_i}{c}|\mathbf{E}|^2 = 0 \text{ в } V_i, \quad \frac{4\pi\sigma_e}{c}|\mathbf{E}|^2 = 0 \text{ в } V_e,$$
$$\lim_{r\to\infty} \iint\limits_{\Sigma} (|E_\theta|^2 + |E_\varphi|^2)\, d\Sigma = 0. \tag{98}$$

В силу соотношений (97) отсюда также следует, что

$$\lim_{r\to\infty} \iint\limits_{\Sigma} (|H_\theta|^2 + |H_\varphi|^2)\, d\Sigma = 0.$$

Наконец, пользуясь уравнениями Максвелла в сферических координатах, найдем, что

$$E_r = \frac{c}{4\pi\sigma - i\omega\varepsilon} \frac{1}{r \sin\theta} \left[\frac{\partial}{\partial\theta} H_\varphi \sin\theta - \frac{\partial H_\theta}{\partial\varphi}\right],$$
$$H_r = \frac{c}{i\omega\mu} \frac{1}{r \sin\theta} \left[\frac{\partial}{\partial\theta} E_\varphi \sin\theta - \frac{\partial E_\theta}{\partial\varphi}\right],$$

откуда ясно, что радиальные компоненты E_r и H_r по порядку величины не превосходят угловых компонент, так что должно быть

$$\lim_{r \to \infty} \iint_{\Sigma} (|E_r|^2 + |H_r|^2)\, d\Sigma = 0,$$

а поэтому вообще

$$\lim_{r \to \infty} \iint_{\Sigma} |\mathbf{E}|^2\, d\Sigma = \lim_{r \to \infty} \iint_{\Sigma} |\mathbf{H}|^2\, d\Sigma = 0. \tag{99}$$

Если $\sigma_i \neq 0$, $\sigma_e \neq 0$, то из (98) вытекает, что во всем пространстве $\mathbf{E} = 0$, а в силу уравнений (89) также и $\mathbf{H} = 0$. Если же $\sigma_e = 0$, то во внешней области параметр $k = k_e = \frac{\omega \sqrt{\varepsilon_e \mu_e}}{c}$ имеет вещественное значение. Поэтому, приняв во внимание, что каждая из компонент векторов поля удовлетворяет уравнению Гельмгольца, мы можем воспользоваться основной леммой теории уравнения Гельмгольца (§ 7 гл. XXIV), согласно которой выполнение условия (99) при вещественном k влечет за собой обращение $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ в нуль во всей внешней области. Во внутренней же области $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ равны нулю в силу первого из соотношений (98). Таким образом, теорема доказана.

Глава XXX

НАПРАВЛЯЕМЫЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ

§ 1. Поперечно-электрические, поперечно-магнитные и поперечно-электромагнитные волны

В этой главе мы рассмотрим ряд задач, связанных с установившимися процессами распространения электромагнитных волн вдоль систем, обладающих свойством создавать условия, при которых распространение волны происходит, в основном, в заданном направлении. Такие волны называют *направляемыми*, а направляющие их системы — *волноводами*.

Основным приемом, которым мы будем пользоваться для упрощения рассмотрения этих задач, явится представление электромагнитного поля в виде суперпозиции волн нескольких типов.

Пусть ось x_3 направлена вдоль направления распространения волны. Это всегда можно сделать по крайней мере локально, в данной точке. Электромагнитное поле волны определяется шестью компонентами E_1, E_2, E_3, H_1, H_2, H_3 электрического и магнитного векторов. Представим его в виде суперпозиции двух полей, определяемых соответственно компонентами

$$\left.\begin{matrix} 0, & E_2, & 0 \\ H_1, & 0, & H_3 \end{matrix}\right\} \tag{1}$$