и

$$\left.\begin{array}{ccc} E_1, & 0, & E_3 \\ 0, & H_2, & 0. \end{array}\right\} \qquad (2)$$

Наложение этих полей дает, очевидно, исходное поле. Электрический вектор поля (1) перпендикулярен направлению распространения волны, тогда как магнитный вектор имеет отличную от нуля компоненту вдоль направления распространения. Поле (2) характеризуется обратным расположением электрического и магнитного векторов. Именно, электрический вектор имеет компоненту вдоль направления распространения, а магнитный не имеет. В связи с этим волны, характеризуемые полем (1), получили название *поперечно-электрических* или ТЕ-волн (от английского «transverse electric»), а характеризуемые полем (2) — *поперечно-магнитных* или ТМ-волн («transverse magnetic»). Эти названия мы будем применять и для волн, у которых все поперечные компоненты отличны от нуля, т. е. характеристическим признаком ТЕ- и ТМ-волн будем считать $E_3 = 0$ в первом случае и $H_3 = 0$ во втором.

Введем, наконец, еще третий тип волн, характеризуемый отсутствием продольных компонент как у электрического, так и у магнитного вектора. Такие волны характеризуются следующей таблицей компонент:

$$\left.\begin{array}{ccc} E_1, & E_2, & 0 \\ H_1, & H_2, & 0 \end{array}\right\} \qquad (3)$$

и получили название *поперечно-электромагнитных* или ТЕМ-волн.

Из нашего рассмотрения еще не следует возможности самостоятельного существования волновых процессов, характеризуемых полями (1)—(3). Однако, как мы увидим ниже, волны всех трех типов в соответствующих условиях могут существовать как самостоятельные и независимые друг от друга процессы.

ЗАДАЧА

Показать, что поля вида (1)—(3) могут быть полями бегущей волны.

Указание. Следует исходить из уравнений Максвелла.

§ 2. Волны между идеально проводящими плоскостями, разделенными диэлектриком

Изучим распространение плоской волны между двумя параллельными идеально проводящими плоскостями, отстоящими на расстояние s. Расположим начало координат на одной из плоскостей. Ось x_3 будем считать ориентированной по направлению распространения волны, а ось x_1 — перпендикулярной к рассматриваемым плоскостям и направленной так, чтобы уравнения плоскостей были

$x_1=0$ и $x_1=s$. При этом выборе осей все величины не будут зависеть от x_2 и уравнения поля (40)—(41) гл. XXIX примут вид:

$$\begin{aligned}
&\frac{i\omega\mu}{c}H_1=-\frac{\partial E_2}{\partial x_3}, && \frac{4\pi\sigma-i\omega\varepsilon}{c}E_1=-\frac{\partial H_2}{\partial x_3},\\
&\frac{i\omega\mu}{c}H_2=\frac{\partial E_1}{\partial x_3}-\frac{\partial E_3}{\partial x_1}, && \frac{4\pi\sigma-i\omega\varepsilon}{c}E_2=\frac{\partial H_1}{\partial x_3}-\frac{\partial H_3}{\partial x_1},\\
&\frac{i\omega\mu}{c}H_3=\frac{\partial E_2}{\partial x_1}, && \frac{4\pi\sigma-i\omega\varepsilon}{c}E_3=\frac{\partial H_2}{\partial x_1},
\end{aligned} \tag{4}$$

где σ, ε и μ — соответственно электропроводность и диэлектрическая и магнитная проницаемости диэлектрика, разделяющего проводящие плоскости.

Попробуем теперь представить рассматриваемую волну в виде суперпозиции TE- и TM-волн (§ 1). Рассматривая систему уравнений (4) видим, что она распадается на две независимые системы:

$$\frac{i\omega\mu}{c}H_1=-\frac{\partial E_2}{\partial x_3}, \qquad \frac{i\omega\mu}{c}H_3=\frac{\partial E_2}{\partial x_1}, \tag{5а}$$

$$\frac{4\pi\sigma-i\omega\varepsilon}{c}E_2=\frac{\partial H_1}{\partial x_3}-\frac{\partial H_3}{\partial x_1} \tag{5б}$$

и

$$\frac{4\pi\sigma-i\omega\varepsilon}{c}E_1=-\frac{\partial H_2}{\partial x_3}, \qquad \frac{4\pi\sigma-i\omega\varepsilon}{c}E_3=\frac{\partial H_2}{\partial x_1}, \tag{6а}$$

$$\frac{i\omega\mu}{c}H_2=\frac{\partial E_1}{\partial x_3}-\frac{\partial E_3}{\partial x_1}, \tag{6б}$$

в первую из которых входят только переменные H_1, H_3 и E_2, а во вторую — только E_1, E_3, H_2. Поэтому решения систем (5а, б) и (6а, б) могут оказаться взаимозависимыми только тогда, когда взаимозависимы граничные условия для двух групп переменных: H_1, H_3, E_2 и E_1, E_3, H_2, что в ряде интересных задач, как мы знаем, не имеет места.

Таким образом, если граничные условия могут быть разбиты на две группы, в одну из которых входят только переменные H_1, H_3, E_2, а в другую — только переменные E_1, E_3, H_2, и решение системы (4) существует, то его можно построить наложением решений системы (5а, б) и системы (6а, б). Но в силу соотношений (1)—(2), решение системы (5а, б) соответствует TE-волнам, а системы (6а, б) — TM-волнам. Следовательно, при определенных условиях действительно могут существовать TE- и TM-волны, распространяющиеся независимо друг от друга.

Отыскание TE- и TM-волн сводится к решению одного скалярного уравнения Гельмгольца. Действительно, из уравнений (5а) и (6а) следует, что компоненты H_1, H_3 и E_1, E_3 можно получить дифференцированием соответственно компонент E_2 и H_2, так что достаточно определить эти последние. Но, как мы знаем (§ 1 гл. XXIX), каждая из компонент векторов поля удовлетворяет уравнению Гельмгольца*. Поэтому мы приходим к двум уравнениям Гельмгольца, первое из которых определяет ТЕ-, а второе ТМ-волны:

$$\frac{\partial^2 E_2}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 E_2}{\partial x_3^2}+k^2 E_2=0, \tag{7а}$$

$$\frac{\partial^2 H_2}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 H_2}{\partial x_3^2}+k^2 H_2=0, \tag{7б}$$

где по (46) гл. XXIX

$$k^2=\frac{\omega^2\varepsilon\mu+4\pi i\omega\sigma\mu}{c^2}. \tag{8}$$

Перейдем к рассмотрению граничных условий.

Как мы знаем (гл. XXIV, § 1), решение уравнения Гельмгольца в бесконечной области определяется заданием линейной комбинации искомой функции и ее нормальной производной на границе области и условий на бесконечности. Если на бесконечности удовлетворяется условие излучения, то решение однозначно. В этом случае, в частности, поле на бесконечности стремится к нулю. Однако в этой главе мы не будем интересоваться такого рода решениями, так как при изучении направляемых волн *основной интерес представляют волны, не затухающие в направлении излучения*, а поэтому и *не убывающие безгранично* в удаленных точках. Вследствие этого, в качестве условия на бесконечности, введем требование, чтобы искомое решение было *ограниченным* в бесконечно удаленной точке. При этом решения уравнения Гельмгольца, очевидно, заведомо не будут единственными, наша же цель будет состоять в том, чтобы выяснить, какие именно *типы волн* охватываются этими решениями.

Займемся теперь требованиями, предъявляемыми к решению на границе.

Согласно § 7 гл. XXIX на границе идеального проводника должна обращаться в нуль касательная составляющая электрического вектора и нормальная магнитного, т. е. должно быть

$$E_2=E_3=0, \tag{9}$$

$$H_1=0, \tag{10}$$

причем последнее условие является следствием первого. Для компонент E_1, H_2, H_3 граничные условия писать не нужно, поскольку скачки E_1, H_2, H_3 на границе определяются индуцированными проходящей волной электрическими слоями и поверхностными токами. Граничные значения E_1, H_2, H_3, даваемые решением, позволяют определить эти слои и токи.

---

* Это, конечно, легко устанавливается и исключением переменных из систем (5а, б) и (6а, б).

Покажем, что если принять:

$$\text{при } x_1 = 0 \text{ и } x_1 = s \qquad E_2 = 0, \tag{11а}$$

$$\text{при } x_1 = 0 \text{ и } x_1 = s \qquad \frac{\partial H_2}{\partial x_1} = 0, \tag{11б}$$

то условия (9) будут выполнены. Действительно, в силу второго из уравнений (6а) при $x_1 = 0$ и $x_1 = s$ имеем $E_3 = 0$. В силу же первого из уравнений (5а) $H_1 = 0$, так как вдоль границы переменная E_2 не меняется (равна нулю).

Решения уравнений (7а, б) будем искать по методу разделения переменных. Для этого искомое решение представим в виде произведения двух функций $U(x_1)$ и $V(x_3)$. После подстановки в уравнение и разделения переменных получим

$$\frac{d^2U}{dx_1^2} + k_n^2 U = 0,$$

$$\frac{d^2V}{dx_3^2} - \gamma_n^2 V = 0,$$

где

$$\gamma_n^2 = k_n^2 - k^2,$$

а k_n^2 — произвольное число. Общие интегралы этих уравнений:

$$U(x_1) = A_1 \sin k_n x_1 + A_2 \cos k_n x_1, \tag{12}$$

$$U(x_3) = B_1 e^{-\gamma_n x_3} + B_2 e^{\gamma_n x_3}. \tag{13}$$

Подчинив $U(x_1)$ граничному условию (11а), найдем, что

$$A_2 = 0,$$

и получим следующее выражение для собственных чисел граничной задачи, определяющей ТЕ-волны:

$$k_n = \frac{\pi}{s} n \qquad (n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots). \tag{14}$$

Отсюда, с точностью до несущественного произвольного множителя A_1,

$$U(x_1) = \sin n\pi \frac{x_1}{s} \qquad (n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots), \tag{15}$$

причем собственное число $k_n = 0$ соответствует тривиальному нулевому решению.

Подчиняя $U(x_1)$ граничным условиям (11 б), получим $A_1 = 0$ и тот же спектр (14) собственных значений. Отсюда следует, что для ТМ-волн, с точностью до несущественного множителя,

$$U(x_1) = \cos n\pi \frac{x_1}{s}. \tag{16}$$

Для отыскания $V(x_3)$ подставим значение k^2 из (8) и $k_n^2 = \frac{\pi^2}{s^2} n^2$ в выражение для γ_n^2. Это даст

$$\gamma_n^2 = \frac{\pi^2}{s^2} n^2 - \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\omega^2 - i\frac{4\pi\omega\mu\sigma}{c}. \tag{17}$$

Если электропроводность σ диэлектрика, разделяющего проводящие плоскости, отлична от нуля, то γ_n^2 — комплексное число, а поэтому его корень γ_n имеет отличную от нуля вещественную часть. Подставив γ_n в (13) и заметив, что в силу условия на бесконечности надо сохранить лишь тот член, который остается ограниченным при возрастании x_3, придем к выводу, что при $\sigma \neq 0$ решение для E_2 и H_2 содержит экспоненциально убывающий множитель. В этом случае рассматриваемый волновой процесс экспоненциально затухает в направлении распространения.

Предположим теперь, что диэлектрик совершенный, т. е. $\sigma = 0$. Тогда

$$\gamma_n^2 = \frac{\pi^2}{s^2} n^2 - \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\omega^2.$$

Для дальнейшего анализа это выражение удобно преобразовать, выразив круговую частоту ω через длину волны λ. Имеем

$$\omega = 2\pi \frac{c_1}{\lambda},$$

где c_1 — скорость распространения электромагнитного поля в диэлектрике между проводящими плоскостями. С другой стороны $c_1 = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$, в силу чего

$$\omega = \frac{2\pi c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}\,\lambda$$

и

$$\gamma_n^2 = \frac{\pi^2 n^2}{s^2\lambda^2}\left(\lambda^2 - \frac{4s^2}{n^2}\right). \tag{18}$$

В зависимости от значения λ_n^2 имеем несколько случаев.

Если

$$\lambda > \frac{2s}{n},$$

то γ_n — вещественное число и рассуждения, аналогичные проведенным для $\sigma \neq 0$, показывают, что волновой процесс при данных λ и n *экспоненциально затухает в направлении распространения.* В частности, для $\lambda > 2s$ между проводящими плоскостями *возможны только затухающие TE- и TM-волны.*

Если

$$\lambda = \frac{2s}{n},$$

т. е. полуволна целое число раз укладывается в интервале между двумя плоскостями, то $\gamma_n=0$ и данным λ и n, в силу соотношений (14), (15) и (16), с точностью до множителя соответствуют решения

$$E_2=\sin \pi n \frac{x_1}{s}$$

для ТЕ-волн и

$$H_2=\cos \pi n \frac{x_1}{s}$$

для ТМ-волн, не зависящие от координаты x_2. Это означает, что в точках любой плоскости $x_3=\text{const}\,(x_1 \leqslant s)$ электромагнитные колебания в этих волнах происходят в одной фазе и с одинаковой амплитудой. Такие колебания представляют, очевидно, *стоячие волны*. В случае ТМ-волн при $n=0$ получаем *постоянное магнитное поле*.

Наконец, если

$$\lambda<\frac{2s}{n},$$

то

$$\gamma_n=i\beta_n,$$

где β_n — отличное от нуля вещественное число. В силу соотношений (14), (15) и (16), при таких значениях λ и n получим решения

$$E_2=\sin \pi n \frac{x_1}{s}\left(B_1 e^{-i\beta_n x_3}+B_2 e^{i\beta_n x_3}\right)$$

для ТЕ-волн и

$$H_2=\cos \pi n \frac{x_1}{s}\left(B_1 e^{-i\beta_n x_3}+B_2 e^{i\beta_n x_3}\right)$$

для ТМ-волн, которым соответствуют волны с амплитудами, меняющимися по законам:

$$\operatorname{Re} \sin \pi n \frac{x_1}{s} e^{-i\beta_n x_3}, \quad \operatorname{Re} \sin \pi n \frac{x_1}{s} e^{i\beta_n x_3},$$

$$\operatorname{Re} \cos \pi n \frac{x_1}{s} e^{-i\beta_n x_3}, \quad \operatorname{Re} \cos \pi n \frac{x_1}{s} e^{i\beta_n x_3}.$$

Для большей наглядности запишем эти выражения, введя временно́й множитель $e^{-i\omega t}$. Это даст

$$\operatorname{Re} {\sin \atop \cos} \pi n \frac{x_1}{s} e^{-i(\beta_n x_3+\omega t)}, \quad \operatorname{Re} {\sin \atop \cos} \pi n \frac{x_1}{s} e^{i(\beta_n x_3-\omega t)},$$

откуда ясно, что рассматриваемые волны *бегущие*, причем в первой и третьей из них фаза распространяется вдоль оси x_3 в отрицательном направлении, а во второй и четвертой — в положительном, с одинаковой *фазовой скоростью*

$$v_\varphi = \frac{\omega}{\beta_n}. \tag{19}$$

Поле TE-волн обязательно зависит от координаты x_1. В случае же TM-волн при $n=0$ имеем волны

$$H_2 = e^{\pm i\beta_n x_3},$$

не зависящие от координаты x_1, т. е. *плоские волны.* В силу второго из уравнений (6а) в этом случае продольная компонента электрического вектора $E_3=0$. Отсюда заключаем, что этот тип волн представляет *TEM-волны.*

ЗАДАЧИ

1. Исследовать поведение компонент H_1 и H_3 в TE-волне и компонент E_1 и E_3 в TM-волне, распространяющихся между двумя параллельными идеально проводящими плоскостями.

2. Исследовать распределение токов и зарядов на проводящих плоскостях при прохождении волны.

Указание. Использовать граничные условия для E_1, H_2 и H_3.

3. Показать, что бесконечно большая скорость распространения фазы «бегущей» волны соответствует стоячей волне.

Указание. Воспользоваться формулой (19).

4. Исследовать, что нового будет внесено в решение задачи о распространении волн между двумя плоскостями требованием, чтобы решение, кроме граничных условий (11а, б) удовлетворяло еще *условию излучения* (гл. XXIV, § 5).

5. Исследовать распространение волн в волноводе, представляющем короб прямоугольного сечения с идеально проводящими стенками.

§ 3. Дальнейшее рассмотрение направляемых волн

Каждая из компонент векторов электромагнитного поля, как мы знаем, удовлетворяет уравнению Гельмгольца. Если искать решение уравнения Гельмгольца в форме произведения $U(x_1, x_2)V(x_3)$, мы придем к уравнению

$$\frac{1}{U}\left(\frac{d^2U}{dx_1^2} + \frac{d^2U}{dx_2^2}\right) + \frac{1}{V}\frac{d^2V}{dx_3^2} + k^2 = 0,$$

которое, как легко видеть, распадается на два уравнения:

$$\frac{d^2U}{dx_1^2} + \frac{d^2U}{dx_2^2} + (k^2 - \gamma^2)U = 0 \tag{20}$$

и

$$\frac{d^2V}{dx_3^2} + \gamma^2 V = 0, \tag{21}$$

где γ^2 — произвольное комплексное или вещественное число. Если γ^2 — комплексное или отрицательное вещественное число, то ограниченные в бесконечно удаленных точках решения $V(x_3)$ урав-