жительном, с одинаковой *фазовой скоростью*

$$v_\varphi = \frac{\omega}{\beta_n}. \tag{19}$$

Поле ТЕ-волн обязательно зависит от координаты x_1. В случае же ТМ-волн при $n=0$ имеем волны

$$H_2 = e^{\pm i\beta_n x_3},$$

не зависящие от координаты x_1, т. е. *плоские волны*. В силу второго из уравнений (6а) в этом случае продольная компонента электрического вектора $E_3=0$. Отсюда заключаем, что этот тип волн представляет *TEM-волны*.

ЗАДАЧИ

1. Исследовать поведение компонент H_1 и H_3 в ТЕ-волне и компонент E_1 и E_3 в ТМ-волне, распространяющихся между двумя параллельными идеально проводящими плоскостями.

2. Исследовать распределение токов и зарядов на проводящих плоскостях при прохождении волны.

Указание. Использовать граничные условия для E_1, H_2 и H_3.

3. Показать, что бесконечно большая скорость распространения фазы «бегущей» волны соответствует стоячей волне.

Указание. Воспользоваться формулой (19).

4. Исследовать, что нового будет внесено в решение задачи о распространении волн между двумя плоскостями требованием, чтобы решение, кроме граничных условий (11а, б) удовлетворяло еще *условию излучения* (гл. XXIV, § 5).

5. Исследовать распространение волн в волноводе, представляющем короб прямоугольного сечения с идеально проводящими стенками.

§ 3. Дальнейшее рассмотрение направляемых волн

Каждая из компонент векторов электромагнитного поля, как мы знаем, удовлетворяет уравнению Гельмгольца. Если искать решение уравнения Гельмгольца в форме произведения $U(x_1, x_2)V(x_3)$, мы придем к уравнению

$$\frac{1}{U}\left(\frac{d^2U}{dx_1^2}+\frac{d^2U}{dx_2^2}\right)+\frac{1}{V}\frac{d^2V}{dx_3^2}+k^2=0,$$

которое, как легко видеть, распадается на два уравнения:

$$\frac{d^2U}{dx_1^2}+\frac{d^2U}{dx_2^2}+(k^2-\gamma^2)U=0 \tag{20}$$

и

$$\frac{d^2V}{dx_3^2}+\gamma^2V=0, \tag{21}$$

где γ^2 — произвольное комплексное или вещественное число. Если γ^2 — комплексное или отрицательное вещественное число, то ограниченные в бесконечно удаленных точках решения $V(x_3)$ уравнения (21) представляют экспоненциально убывающие в направлении x_3 функции (см., например, § 2). Соответствующие им решения $U(x_1, x_2,)V(x_3)$ уравнения Гельмгольца представляют поэтому волны, экспоненциально затухающие в направлении x_3. Если же γ^2 — положительное вещественное число, то общий интеграл уравнения (21) равен

$$V(x_3) = B_1 e^{-i\gamma x_3} + B_2 e^{i\gamma x_3} \qquad (22)$$

и решение уравнения Гельмгольца представляет суперпозицию двух незатухающих в направлении x_3 волн. Первая из них (как это легко видеть, умножив выражение (22) на $e^{-i\omega t}$) при $\gamma > 0$ распространяется в отрицательном, а вторая — в положительном направлении оси x_3. Этот класс волн представляет особый интерес в теории направляемых волн, поскольку к нему принадлежат волны, которые *могут распространяться вдоль волноводов без ослабления*. В связи с этим в дальнейшем мы, в основном, сосредоточим внимание на следующей задаче: какие именно волны этого класса могут распространяться вдоль волноводов. При этом, считая, что параметр γ может быть любого знака, зависимость от x_3 для каждой отдельной волны будем учитывать вводя в решение множитель

$$e^{i\gamma x_3}, \qquad (23)$$

где γ — произвольное вещественное число, получившее название *постоянной распространения*. Очевидно также, что достаточно рассматривать только случаи, когда $\gamma > 0$, так как при $\gamma < 0$ изменится лишь направление бегущих волн, в остальном же картина останется неизменной. Следует только помнить, что *если возможна прямая волна, то возможна и обратная.*

Таким образом, задача о направляемых волнах приведена нами к изучению полей, зависимость которых от координаты x_3 дается выражением (23). Заметим, что компоненты векторов поля при этом будут удовлетворять не только трехмерному, но и двумерному уравнению Гельмгольца (20), а производные по координате x_3 соотношениям

$$\frac{\partial E_\alpha}{\partial x_3} = i\gamma E_\alpha, \quad \frac{\partial H_\alpha}{\partial x_3} = i\gamma H_\alpha \qquad (\alpha = 1,\ 2,\ 3). \qquad (24)$$

В дальнейшем введем также следующие упрощения. В предыдущем параграфе для рассматривавшегося там случая было показано, что при распространении волн в несовершенном диэлектрике ($\sigma \neq 0$) амплитуда бегущих волн экспоненциально убывает. С физической точки зрения это обстоятельство является простым следствием того, что в несовершенном диэлектрике при прохождении волны возникают токи, а это приводит к рассеянию энергии волны за счет джоулева тепла. В связи с тем, что изучение этого последнего процесса не входит в нашу задачу, будем считать, что распространение волн происходит в совершенном диэлектрике ($\sigma = 0$).

Подставив соотношения (24) и $\sigma = 0$ в уравнения поля (40)—(41) гл. XXIX и разрешив их относительно поперечных компонент, получим для этих последних следующие выражения:

$$\left.\begin{aligned}(k^2-\gamma^2)\,E_1 &= i\gamma\frac{\partial E_3}{\partial x_1}+\frac{i\omega\mu}{c}\,\frac{\partial H_3}{\partial x_2},\\ (k^2-\gamma^2)\,E_2 &= i\gamma\frac{\partial E_3}{\partial x_2}-\frac{i\omega\mu}{c}\,\frac{\partial H_3}{\partial x_1},\\ (k^2-\gamma^2)\,H_1 &= i\gamma\frac{\partial H_3}{\partial x_1}-\frac{i\omega\varepsilon}{c}\,\frac{\partial E_3}{\partial x_2},\\ (k^2-\gamma^2)\,H_2 &= i\gamma\frac{\partial H_3}{\partial x_2}+\frac{i\omega\varepsilon}{c}\,\frac{\partial E_3}{\partial x_1},\end{aligned}\right\} \tag{25}$$

$$k^2 \equiv \frac{\omega^2\varepsilon\mu}{c^2}, \tag{26}$$

из которых видно, что все поперечные компоненты векторов поля при $k^2-\gamma^2 \neq 0$ могут быть найдены простым дифференцированием продольных компонент. Что же касается этих последних, то мы будем искать их как решения двумерных уравнений Гельмгольца вида (20):

$$\frac{\partial^2 E_3}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 E_3}{\partial x_2^2}+(k^2-\gamma^2)\,E_3=0, \tag{27}$$

$$\frac{\partial^2 H_3}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 H_3}{\partial x_2^2}+(k^2-\gamma^2)\,H_3=0. \tag{28}$$

В особом положении находится случай TEM-волн, для которых $E_3 = H_3 = 0$. Из (25) следует, что этот тип волн возможен только при $k^2 = \gamma^2$, так как при $k^2 \neq \gamma^2$ все компоненты TEM-волн должны быть равны нулю. Подставив k^2 из (26) найдем, что для TEM-волн

$$\gamma = \omega\frac{\sqrt{\varepsilon\mu}}{c}. \tag{29}$$

Для определения поперечных компонент TEM-волны система (25) неприменима. Обращаясь снова к уравнениям поля (40)—(41) гл. XXIX и подставляя γ из (29), после несложных преобразований найдем, что в случае TEM-волн система (40)—(41) гл. XXIX сведется к четырем соотношениям:

$$\sqrt{\varepsilon}E_1=\sqrt{\mu}H_2, \quad \sqrt{\varepsilon}E_2=-\sqrt{\mu}H_1, \tag{30}$$

$$\frac{\partial E_1}{\partial x_1}+\frac{\partial E_2}{\partial x_2}=0, \quad \frac{\partial H_1}{\partial x_1}+\frac{\partial H_2}{\partial x_2}=0. \tag{31}$$

Подставив в (31) выражения для H_1 и H_2 из (30), получим

$$\frac{\partial E_1}{\partial x_2}-\frac{\partial E_2}{\partial x_1}=0.$$

Дифференцируя это соотношение по x_2 и складывая с первым из соотношений (31), продифференцированным по x_1, получим

$$\frac{\partial^2 E_1}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 E_1}{\partial x_2^2}=0.$$

Аналогичным путем получаются уравнения этого же вида и для остальных компонент, так что вообще

$$\Delta_{12}E_1=0,\ \Delta_{12}E_2=0,\ \Delta_{12}H_1=0,\ \Delta_{12}H_2=0, \tag{32}$$

где $\Delta_{12}=\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}$ — двумерный оператор Лапласа. (Заметим, что уравнения (32) являются также простыми следствиями уравнения (20) при $\gamma^2=k^2$.)

Таким образом, и в общем случае мы имеем дело с положением, примерно аналогичным рассмотренному в § 2. Для решения задачи о распространении ТМ- или ТЕ-волн надо найти решение скалярного уравнения Гельмгольца, определяющего продольную компоненту электрического или магнитного вектора, поперечные же компоненты векторов поля могут быть найдены дифференцированием. Задача о распространении ТЕМ-волн приводится к уравнению Лапласа, т. е. ее решениями служат хорошо изученные нами выше *гармонические функции.*

Если волновод представляет идеальный проводник, то, как было разъяснено в § 7 гл. XXIX, на его границе должна обращаться в нуль касательная составляющая E_τ электрического вектора. Поэтому решения уравнений (27)—(28) или (32) должны быть подчинены граничному условию:

$$\text{на границе волновода } E_\tau=0. \tag{33}$$

Этим условием определяется и набор допустимых значений γ^2, дающих решение задачи.

Попробуем сделать некоторые заключения из полученных общих соотношений.

Начнем с поперечно-электромагнитных волн. Подставляя выражение (29) для γ в (23) и умножая (23) на $e^{-i\omega t}$, получим

$$e^{ik(x_3-c_1t)}, \tag{34}$$

где $c_1\equiv\frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$ — скорость распространения электромагнитных волн в диэлектрике с проницаемостями ε и μ (см. § 7 гл. XXIX). Таким образом, ТЕМ-волна всегда представляет бегущую волну со скоростью распространения c_1, не зависящей от частоты ω. Поэтому, в частности, *любая комбинация ТЕМ-волн разных частот,* образующая волну сложного профиля, *распространяется так, что этот профиль сохраняется.* Как известно из теории интеграла Фурье, наложением гармонических волн, бесконечно протяженных в пространстве, можно получить сложную волну (волновой пакет), амплитуда которой отлична от нуля лишь в ограниченной части пространства. По сказанному, такая волна, образованная наложением ТЕМ-волн, будет распространяться без искажения формы, все время оставаясь локализованной лишь в ограниченной части пространства. Рассматриваемое свойство означает, что *ТЕМ-волны распространяются без дисперсии*.

Легко видеть, что из соотношений (30) вытекает перпендикулярность электрического и магнитного векторов в ТЕМ-волне, причем абсолютные величины взаимно-перпендикулярных компонент электрического и магнитного векторов взаимно-пропорциональны. Элементарное доказательство этого утверждения представляется читателю. Коэффициент пропорциональности

$$\eta = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$$

зависит только от свойств диэлектрика, в котором распространяется волна, и получил название *характеристического сопротивления диэлектрика*.

Наконец, отметим, что в силу уравнений (32), компоненты векторов поля ТЕМ-волны представляют гармонические функции аргументов x_1, x_2 в любой плоскости $x_3 = \mathrm{const}$. Это, во-первых, означает, что картина поля ТЕМ-волны в любой фиксированный момент времени совпадает с картиной статических электрического и магнитного полей, которые возникают при аналогичных граничных условиях. Во-вторых, отсюда следует, что эти компоненты представляют производные по x_1 и x_2 соответствующих потенциалов, также являющихся гармоническими функциями.

Из последнего обстоятельства очевидно, что ТЕМ-волны *не могут* распространяться внутри волновода с проводящими границами, *охватывающими поле ТЕМ-волны* и образующими в сечении с плоскостью $x_3 = \mathrm{const}$ *замкнутый односвязный контур*. Действительно, заряды на поверхности проводника образуют слой, электростатический потенциал которого одинаков во всех точках. Но гармоническая функция, принимающая постоянное значение на некотором контуре, имеет это же постоянное значение и внутри него. Поэтому компоненты электрического вектора (а в силу соотношений (30) и магнитного), являющиеся производными потенциала, в этом случае тождественно равны нулю и поле в волноводе отсутствует. Если, однако, поле волны не охватывается одним проводником, то указанное обстоятельство отпадает. Поэтому волноводом для ТЕМ-волн может служить провод, *вне* которого распространяется волна, система проводов, но не, например, внутренняя поверхность полого цилиндра и т. п.

Перейдем к рассмотрению *поперечно-магнитных* (ТМ) *волн*. В волнах этого типа составляющая $H_3 = 0$ и задача об их распространении, по сказанному выше, сводится к решению одного скалярного уравнения Гельмгольца (27).

Прежде всего рассмотрим проблему граничных условий, аналогичную рассмотренной в § 2. Решение уравнения Гельмгольца вполне определяется одним граничным условием, которое, в силу (33), должно быть следующим:

$$\text{на границе волновода } E_3 = 0. \tag{35}$$

Но решение должно удовлетворять еще одному граничному условию: касательная составляющая электрического вектора в поперечной плоскости должна быть равна нулю. Покажем, что это условие выполняется автоматически в силу уравнений (25).

При $H_3 = 0$ система уравнений (25) может быть записана в следующем виде

$$\frac{k^2-\gamma^2}{i\gamma} E_1 = \frac{(k^2-\gamma^2)\,c}{i\omega\varepsilon} H_2 = \frac{\partial E_3}{\partial x_1}, \tag{36}$$

$$\frac{k^2-\gamma^2}{i\gamma} E_2 = -\frac{(k^2-\gamma^2)\,c}{i\omega\varepsilon} H_1 = \frac{\partial E_3}{\partial x_2}, \tag{37}$$

откуда найдем, что

$$E_1 = \frac{c\gamma}{\omega\varepsilon} H_2, \quad E_2 = -\frac{c\gamma}{\omega\varepsilon} H_1,$$

т. е. поперечные составляющие электрического и магнитного векторов взаимно перпендикулярны, причем абсолютные значения взаимно перпендикулярных компонент пропорциональны. В отличие от ТЕМ-волн коэффициент пропорциональности зависит также от свойств волновода, влияющих на значение постоянной распространения γ. Так как магнитный вектор ТМ-волны является поперечным, из сказанного вытекает также, что магнитный вектор ТМ-волны перпендикулярен электрическому.

Пусть ψ — угол между касательной T к поверхности проводника в какой-либо точке поперечного сечения волновода и осью x_1. Производная компоненты E_3 по направлению T, равная

$$\frac{\partial E_3}{\partial T} = \frac{\partial E_3}{\partial x_1}\cos\psi + \frac{\partial E_3}{\partial x_2}\sin\psi,$$

на поверхности проводника обращается в нуль в силу условия (35). Заметив, что в силу соотношений (36) касательная составляющая электрического вектора равна

$$E_\tau = E_1\cos\psi + E_2\sin\psi = \frac{i\gamma}{k^2-\gamma^2}\frac{\partial E_3}{\partial T},$$

придем к выводу, что при выполнении для точек границы граничного условия (35) выполняется и общее граничное условие $E_\tau = 0$. Таким образом, граничное условие (35) в силу уравнений поля влечет за собой выполнение и общего граничного условия для электрического вектора.

Для дальнейшего анализа воспользуемся полученным выше при изучении теории уравнения Гельмгольца интегральным соотношением задачи 7 из § 6 гл. XXIV. Положив в нем $u = E_3$ и заметив, что по (27) k^2 в нем следует заменить через $(k^2 - \gamma^2)$, получим

$$\iiint_V \left[\left(\frac{\partial E_3}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial E_3}{\partial x_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial E_3}{\partial x_3}\right)^2 - (k^2 - \gamma^2) E_3^2\right] dV = \iint_{\mathcal{F}V} E_3 \frac{\partial E_3}{\partial n} dS.$$

Будем считать, что рассматриваемый волновод замкнут, т. е. в плоскости $x_1 x_2$ поле ограничено проводящими поверхностями. За V примем объем, выделенный проводящими стенками и двумя произвольными поперечными сечениями волновода. Тогда интеграл в правой части рассматриваемого интегрального соотношения обращается в нуль, так как на стенках волновода $E_3 = 0$, а на секущих плоскостях $\frac{\partial E_3}{\partial n} = \frac{\partial E_3}{\partial x_3} = 0$, поскольку компонента E_3 от x_3 не зависит. По последней причине и в левой части этого соотношения пропадет один член, так что окончательно получим

$$\iiint_V \left[\left(\frac{\partial E_3}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial E_3}{\partial x_2}\right)^2 - (k^2 - \gamma^2) E_3^2\right] dV = 0.$$

При $E_3 \not\equiv 0$ это равенство может соблюдаться только при условии, что $k^2 - \gamma^2 > 0$. Приняв во внимание равенство (26), запишем это условие в виде

$$\gamma^2 = \frac{\omega^2}{c_1^2} - \delta^2, \tag{38}$$

где $c_1^2 = \frac{c^2}{\varepsilon\mu}$ — квадрат скорости распространения электромагнитного поля в диэлектрике, заполняющем волновод, а δ — вещественное число. Как мы знаем из общей теории гл. XXIV, при заданных граничных условиях нетривиальные решения уравнения Гельмгольца (27) существуют, вообще говоря, не для всех значений разности $\delta^2 = k^2 - \gamma^2$. Значения δ^2, при которых существуют нетривиальные решения (собственные числа задачи), образуют бесконечную дискретную последовательность. Пусть δ_1^2 — наименьшее из чисел этой последовательности. Тогда из (38) мы найдем, что при

$$\omega^2 < \omega_0^2 \equiv c_1^2 \delta_1^2 \tag{39}$$

$\gamma^2 < 0$, т. е. γ — мнимое число и мы имеем дело с затухающим в направлении x_3 процессом. Таким образом, в общем случае существует такая характеризующая волновод критическая частота ω_0, называемая обычно *частотой отсечки*, что ТМ-волны с частотой, меньшей ω_0, не могут распространяться в волноводе без затухания.

Подставив в выражение (23)

$$\gamma = \frac{\omega}{c_1}\sqrt{1-\frac{\omega_0^2}{\omega^2}} \tag{40}$$

и умножив (23) на $e^{-i\omega t}$, найдем, что зависимость амплитуды волны от координаты x_3 и от времени для ТМ-волн в замкнутом волноводе дается множителем

$$e^{i\frac{2\pi}{\lambda}(x_3-c^*t)},$$

где

$$c^* = \frac{c_1}{\sqrt{1-\frac{\omega_0^2}{\omega^2}}} \tag{41}$$

— фазовая скорость, а

$$\lambda = \frac{2\pi c_1}{\sqrt{\omega^2-\omega_0^2}} \tag{42}$$

— длина ТМ-волны с частотой колебаний ω.

Из выражения (41) вытекает, что фазовая скорость ТМ-волн больше скорости распространения электромагнитного поля в диэлектрике, заполняющем волновод, и зависит от частоты колебаний. Последнее обстоятельство указывает, что при распространении ТМ-волны имеет место *дисперсия*. Волновой пакет, образованный ТМ-волнами и первоначально локализованный в ограниченной части волновода, с течением времени будет все более «расплываться», увеличиваясь по длине. Групповая скорость распространения ТМ-волн (гл. XXIII, § 2) равна

$$c_2^* \equiv \frac{\partial\omega}{\partial\gamma} = c_1\sqrt{1-\frac{\omega_0^2}{\omega^2}}.$$

С этой скоростью распространяется центр волнового пакета.

Изучение общего случая распространения в волноводах ТЕ-волн может быть проведено аналогичным путем. Отличие состоит только в том, что граничные условия для уравнения Гельмгольца (28) должны быть записаны в форме:

$$\text{на границе волновода } \frac{\partial H_3}{\partial n} = 0, \tag{43}$$

т. е. приходится решать однородную задачу Неймана, а не Дирихле. В дальнейшем же получаются те же выражения для частоты отсечки и фазовой и групповой скорости, что и для ТМ-волны. Убедиться в сказанном предоставляется читателю.

ЗАДАЧИ

1. Отношение модулей поперечных составляющих электрического и магнитного векторов волны называется *волновым сопротивлением*. Показать, что волновые сопротивления Z_{TM} и Z_{TE} для ТМ- и ТЕ-волн даются соответственно выражениями

$$Z_{\text{TM}}=\frac{c\gamma}{\omega\varepsilon}, \quad Z_{\text{TE}}=\frac{\omega\mu}{c\gamma},$$

которые в случае полых волноводов могут быть представлены в форме:

$$Z_{\text{TM}}=\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}\left(1-\frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right)}, \quad Z_{\text{TE}}=\frac{1}{\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}\left(1-\frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right)}}.$$

2. Показать, что в цилиндрических координатах (r, φ, z) с осью z, направленной по оси x_3, соотношения (25) имеют вид:

$$(k^2-\gamma^2)\, E_r=i\gamma\frac{\partial E_z}{\partial r}+\frac{i\omega\mu}{c}\,\frac{1}{r}\,\frac{\partial H_z}{\partial\varphi},$$
$$(k^2-\gamma^2)\, E_\varphi=i\gamma\frac{1}{r}\,\frac{\partial E_z}{\partial\varphi}-\frac{i\omega\mu}{c}\,\frac{\partial H_z}{\partial r},$$
$$(k^2-\gamma^2)\, H_r=i\gamma\frac{\partial H_z}{\partial r}-\frac{i\omega\varepsilon}{c}\,\frac{1}{r}\,\frac{\partial E_z}{\partial\varphi},$$
$$(k^2-\gamma^2)\, H_\varphi=i\gamma\frac{1}{r}\,\frac{\partial H_z}{\partial\varphi}+\frac{i\omega\varepsilon}{c}\,\frac{\partial E_z}{\partial r}.$$

3. Показать, что в цилиндрических координатах, выбранных так, как указано в предыдущей задаче, система уравнений (30)—(31) для ТЕМ-волн имеет вид:

$$\sqrt{\varepsilon}E_r=\sqrt{\mu}H_\varphi, \quad \sqrt{\varepsilon}E_\varphi=\sqrt{\mu}H_r,$$
$$\frac{\partial rE_\varphi}{\partial r}-\frac{\partial E_r}{\partial\varphi}=0, \quad \frac{\partial rH_\varphi}{\partial r}-\frac{\partial H_r}{\partial\varphi}=0.$$

Опираясь на эти уравнения, показать, что произведения rE_r, rE_φ, rH_r, rH_φ удовлетворяют двумерному уравнению Лапласа:

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r}\,\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}=0.$$

§ 4. ТМ-волны в волноводе круглого сечения

Рассмотрим задачу о распространении ТМ-волн в полости проводника, представляющей круглый цилиндр неограниченной длины (круглая труба).

По § 3 эта задача приводится к однородной задаче Дирихле для уравнения Гельмгольца (27), которое в цилиндрических координатах (r, φ, z) примет вид:

$$\frac{1}{r}\,\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial E_z}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\,\frac{\partial^2 E_z}{\partial\varphi^2}+\delta^2 E_z=0, \tag{44}$$

$$\delta^2\equiv k^2-\gamma^2. \tag{45}$$