1. Отношение модулей поперечных составляющих электрического и магнитного векторов волны называется *волновым сопротивлением*. Показать, что волновые сопротивления Z_{TM} и Z_{TE} для TM- и TE-волн даются соответственно выражениями

$$Z_{\text{TM}} = \frac{c\gamma}{\omega\varepsilon}, \quad Z_{\text{TE}} = \frac{\omega\mu}{c\gamma},$$

которые в случае полых волноводов могут быть представлены в форме:

$$Z_{\text{TM}} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}\left(1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right)}, \quad Z_{\text{TE}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}\left(1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right)}}.$$

2. Показать, что в цилиндрических координатах (r, φ, z) с осью z, направленной по оси x_3, соотношения (25) имеют вид:

$$(k^2 - \gamma^2) E_r = i\gamma \frac{\partial E_z}{\partial r} + \frac{i\omega\mu}{c} \frac{1}{r} \frac{\partial H_z}{\partial \varphi},$$

$$(k^2 - \gamma^2) E_\varphi = i\gamma \frac{1}{r} \frac{\partial E_z}{\partial \varphi} - \frac{i\omega\mu}{c} \frac{\partial H_z}{\partial r},$$

$$(k^2 - \gamma^2) H_r = i\gamma \frac{\partial H_z}{\partial r} - \frac{i\omega\varepsilon}{c} \frac{1}{r} \frac{\partial E_z}{\partial \varphi},$$

$$(k^2 - \gamma^2) H_\varphi = i\gamma \frac{1}{r} \frac{\partial H_z}{\partial \varphi} + \frac{i\omega\varepsilon}{c} \frac{\partial E_z}{\partial r}.$$

3. Показать, что в цилиндрических координатах, выбранных так, как указано в предыдущей задаче, система уравнений (30)—(31) для TEM-волн имеет вид:

$$\sqrt{\varepsilon} E_r = \sqrt{\mu} H_\varphi, \quad \sqrt{\varepsilon} E_\varphi = \sqrt{\mu} H_r,$$

$$\frac{\partial r E_\varphi}{\partial r} - \frac{\partial E_r}{\partial \varphi} = 0, \quad \frac{\partial r H_\varphi}{\partial r} - \frac{\partial H_r}{\partial \varphi} = 0.$$

Опираясь на эти уравнения, показать, что произведения rE_r, rE_φ, rH_r, rH_φ удовлетворяют двумерному уравнению Лапласа:

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0.$$

§ 4. TM-волны в волноводе круглого сечения

Рассмотрим задачу о распространении TM-волн в полости проводника, представляющей круглый цилиндр неограниченной длины (круглая труба).

По § 3 эта задача приводится к однородной задаче Дирихле для уравнения Гельмгольца (27), которое в цилиндрических координатах (r, φ, z) примет вид:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial E_z}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 E_z}{\partial \varphi^2} + \delta^2 E_z = 0, \tag{44}$$

$$\delta^2 \equiv k^2 - \gamma^2. \tag{45}$$

Ось z здесь предполагается направленной вдоль оси полости, по оси x_3 системы координат, использованной в § 3.

Разделив переменные в (44) с помощью подстановки $E_z = u(\varphi)v(r)$, придем к уравнениям:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d^2u}{d\varphi^2}+n^2u+0, \\ &\frac{d^2v}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dv}{dr}+\left(\delta^2-\frac{n^2}{r^2}\right)v=0. \end{aligned}\right\} \tag{46}$$

Так как функция u, очевидно, должна иметь период 2π по координате φ, то допустимые значения

$$n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$$

Второе уравнение представляет уравнение Бесселя. Граничное условие для E_3 дает следующее граничное условие для v:

$$v(r_0)=0, \tag{47}$$

где r_0 — радиус полости. Решениями второго уравнения (46), удовлетворяющими условию (47) и ограниченными при $r=0$, являются функции Бесселя n-го порядка $J_n(\delta_{nm}r)$, где δ_{nm} — корни уравнения

$$J_n(\delta_{nm}r_0)=0. \tag{48}$$

Таким образом, частные решения уравнения (44), удовлетворяющие граничному условию $E_z=0$, имеют вид

$$E_{z,\,nm}=J_n(\delta_{nm}r)(A_{nm}\cos n\varphi+B_{nm}\sin n\varphi), \tag{49}$$

где A_{nm} и B_{nm} — произвольные постоянные. Каждое из решений этого вида соответствует ТМ-волне с тем или иным расположением узловых линий. Пользуясь соотношениями, приведенными в задаче 2 к § 3, путем дифференцирования выражений (49) могут быть найдены все поперечные компоненты поля.

При $n=0$, $m=1$ корень уравнения (48) имеет наименьшее значение $\delta_1=\delta_{01}=\frac{2,405}{r_0}$. По (39) это значение определяет частоту отсечки $\omega_0=c_1\frac{2,405}{r_0}$. В воздухе длина волны, имеющей частоту ω_0, равна $\lambda_0=2,606r_0\sqrt{\mu\varepsilon}$. Волны, имеющие в воздухе бóльшую длину, не могут распространяться в рассматриваемом волноводе без затухания. Как ясно из выражений (49), поле при $n=0$ не зависит от угловой координаты φ. При $n\neq 0$ поле зависит от φ, причем имеется $2n$ радиальных узловых линий $E_z=0$. При $m>1$ имеем также $(m-1)$ узловых линий в виде концентрических окружностей с центром на оси волновода. Каждой из ТМ-волн, характеризуемых определенными значениями n и m, соответствует определенная частота отсечки

$$\omega_{nm}=c_1\frac{x_{nm}}{r_0}, \tag{50}$$

где x_{nm} — m-й корень уравнения $J_n(x)=0$. Волны с данными n и m и частотой, меньшей ω_{nm}, не могут распространяться в волноводе без затухания. Следует отметить, что возбуждение в полости чистых колебаний высоких частот с данными n и m практически затруднительно. Они, однако, в той или иной доле присутствуют как обертоны, так же как, например, при колебаниях мембраны.

ЗАДАЧИ

1. Пользуясь графиками функций $J_m(x)$ * найти геометрические места точек, в которых компоненты векторов поля достигают максимума.

2. Найти выражения, определяющие постоянную распространения и длину волны с данными n и m в волноводе круглого сечения.

§ 5. ТЕ-волны в волноводе круглого сечения

Рассмотрение распространения ТЕ-волн проводится в полном параллелизме со случаем ТМ-волн (§ 4) с тем лишь отличием, что здесь мы имеем дело с однородной задачей Неймана, а не Дирихле, для уравнения Гельмгольца:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial H_z}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 H_z}{\partial\varphi^2}+\delta^2 H_z=0 \quad (\delta^2\equiv k^2-\gamma^2), \tag{51}$$

$$\text{на границе волновода } \frac{\partial H_z}{\partial n}=0. \tag{52}$$

Мы рассмотрим лишь отличия в картинах распространения ТМ- и ТЕ-волн.

Частные решения уравнения (51), удовлетворяющие граничному условию (52), имеют вид (49):

$$H_{z,\,nm}=J_n(\varepsilon_{nm}r)\,(A_{nm}\cos n\varphi+B_{nm}\sin n\varphi),$$

однако собственные значения δ_{nm} теперь выражаются соотношением

$$\delta_{mn}=\frac{q_{nm}}{r_0}, \tag{53}$$

где q_{nm} — m-й корень уравнения

$$\frac{dJ_n(x)}{dx}=0 \quad (n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots). \tag{54}$$

В силу соотношения $\frac{dJ_0}{dx}=-J_1(x)$ наименьшее из чисел q_{0m} равно $x_{11}=3{,}832$, что дает для частоты отсечки волн с $n=0$, $m=1$ значение $\omega_{01}=c_1\frac{3{,}832}{r_0}$. Длина волны в воздухе, имеющая частоту ω_{01}, равна $\lambda_{01}=1{,}639 r_0\sqrt{\mu\varepsilon}$. Таким образом, для ТЕ-волн частота отсечки волн с $n=0$, $m=1$ в 1,59 раза выше, чем для

* См., например, Янке и Эмде [63], черт. 98а.