где x_{nm} — m-й корень уравнения $J_n(x)=0$. Волны с данными n и m и частотой, меньшей ω_{nm}, не могут распространяться в волноводе без затухания. Следует отметить, что возбуждение в полости чистых колебаний высоких частот с данными n и m практически затруднительно. Они, однако, в той или иной доле присутствуют как обертоны, так же как, например, при колебаниях мембраны.

ЗАДАЧИ

1. Пользуясь графиками функций $J_m(x)$ * найти геометрические места точек, в которых компоненты векторов поля достигают максимума.

2. Найти выражения, определяющие постоянную распространения и длину волны с данными n и m в волноводе круглого сечения.

§ 5. ТЕ-волны в волноводе круглого сечения

Рассмотрение распространения ТЕ-волн проводится в полном параллелизме со случаем ТМ-волн (§ 4) с тем лишь отличием, что здесь мы имеем дело с однородной задачей Неймана, а не Дирихле, для уравнения Гельмгольца:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial H_z}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 H_z}{\partial\varphi^2}+\delta^2 H_z=0 \quad (\delta^2\equiv k^2-\gamma^2), \tag{51}$$

$$\text{на границе волновода } \frac{\partial H_z}{\partial n}=0. \tag{52}$$

Мы рассмотрим лишь отличия в картинах распространения ТМ- и ТЕ-волн.

Частные решения уравнения (51), удовлетворяющие граничному условию (52), имеют вид (49):

$$H_{z,\,nm}=J_n(\varepsilon_{nm}r)\,(A_{nm}\cos n\varphi+B_{nm}\sin n\varphi),$$

однако собственные значения δ_{nm} теперь выражаются соотношением

$$\delta_{mn}=\frac{q_{nm}}{r_0}, \tag{53}$$

где q_{nm} — m-й корень уравнения

$$\frac{dJ_n(x)}{dx}=0 \quad (n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots). \tag{54}$$

В силу соотношения $\frac{dJ_0}{dx}=-J_1(x)$ наименьшее из чисел q_{0m} равно $x_{11}=3{,}832$, что дает для частоты отсечки волн с $n=0$, $m=1$ значение $\omega_{01}=c_1\frac{3{,}832}{r_0}$. Длина волны в воздухе, имеющая частоту ω_{01}, равна $\lambda_{01}=1{,}639 r_0\sqrt{\mu\varepsilon}$. Таким образом, для ТЕ-волн частота отсечки волн с $n=0$, $m=1$ в 1,59 раза выше, чем для

* См., например, Янке и Эмде [63], черт. 98а.

ТМ-волн. q_{01}, однако, не является наименьшим из чисел q_{nm}. Наименьшим оказывается корень $q_{11}=1{,}84$, что для частоты отсечки дает наименьшее значение $\omega_0=c_1\frac{1{,}84}{r_0}$, которому соответствует длина волны в воздухе $\lambda_0=3{,}41r_0\sqrt{\mu\varepsilon}$. Это означает, что при заданной частоте для передачи ТЕ-волн волновод может иметь радиус примерно на 23% меньший, чем для передачи ТМ-волн.

ЗАДАЧИ

1. Решить задачи 1 и 2 к § 4 для случая ТЕ-волн.

Указание. Использовать соотношение

$$\frac{dJ_n(x)}{dx}=\frac{1}{2}\left[J_{n-1}(x)-J_{n+1}(x)\right].$$

2. Выяснить, какие незатухающие волновые процессы могут возбуждаться в цилиндрической полости конечной длины в идеальном проводнике.

§ 6. Волны в коаксиальном кабеле

Коаксиальным кабелем (или *коаксиальной линией*) называется направляющая система, в которой волны распространяются в диэлектрике, заполняющем пространство между двумя круговыми проводящими цилиндрами, имеющими общую ось (рис. 52). Простота конструкции и надежное экранирование поля внешним цилиндром привели к широкому распространению коаксиальных кабелей в технике. Поскольку граница диэлектрика в коаксиальном кабеле не является односвязной, вдоль него могут распространяться ТЕМ-волны, частоты которых не ограничены ни условиями отсечек, ни дисперсией. С рассмотрения этих волн мы и начнем.

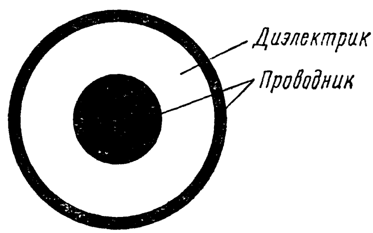

Рис. 52

Введем цилиндрическую систему координат (r, φ, z) с осью z, направленной вдоль общей оси проводящих цилиндров. В этой системе координат касательная составляющая электрического и нормальная составляющая магнитного векторов на границе проводников будут соответственно равны E_φ и H_r, так что граничные условия будут иметь вид

$$\text{на границе волновода } E_\varphi=H_r=0.$$

Но, как следует из задачи 3 к § 3, произведения rE_φ и rH_r в кольцевой области, ограниченной проводниками, являются гармоническими функциями. Поскольку они обращаются в нуль на границах