ТМ-волн. q_{01}, однако, не является наименьшим из чисел q_{nm}. Наименьшим оказывается корень $q_{11}=1,84$, что для частоты отсечки дает наименьшее значение $\omega_0=c_1\frac{1,84}{r_0}$, которому соответствует длина волны в воздухе $\lambda_0=3,41r_0\sqrt{\mu\varepsilon}$. Это означает, что при заданной частоте для передачи ТЕ-волн волновод может иметь радиус примерно на 23% меньший, чем для передачи ТМ-волн.

ЗАДАЧИ

1. Решить задачи 1 и 2 к § 4 для случая ТЕ-волн.

Указание. Использовать соотношение

$$\frac{dJ_n(x)}{dx}=\frac{1}{2}\left[J_{n-1}(x)-J_{n+1}(x)\right].$$

2. Выяснить, какие незатухающие волновые процессы могут возбуждаться в цилиндрической полости конечной длины в идеальном проводнике.

§ 6. Волны в коаксиальном кабеле

Коаксиальным кабелем (или *коаксиальной линией*) называется направляющая система, в которой волны распространяются в диэлектрике, заполняющем пространство между двумя круговыми проводящими цилиндрами, имеющими общую ось (рис. 52). Простота конструкции и надежное экранирование поля внешним цилиндром привели к широкому распространению коаксиальных кабелей в технике. Поскольку граница диэлектрика в коаксиальном кабеле не является односвязной, вдоль него могут распространяться ТЕМ-волны, частоты которых не ограничены ни условиями отсечек, ни дисперсией. С рассмотрения этих волн мы и начнем.

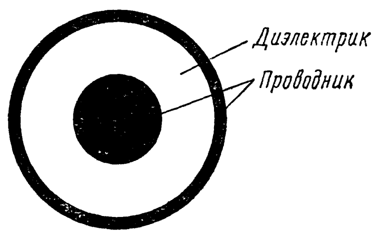

Рис. 52

Введем цилиндрическую систему координат (r, φ, z) с осью z, направленной вдоль общей оси проводящих цилиндров. В этой системе координат касательная составляющая электрического и нормальная составляющая магнитного векторов на границе проводников будут соответственно равны E_φ и H_r, так что граничные условия будут иметь вид

$$\text{на границе волновода } E_\varphi=H_r=0.$$

Но, как следует из задачи 3 к § 3, произведения rE_φ и rH_r в кольцевой области, ограниченной проводниками, являются гармоническими функциями. Поскольку они обращаются в нуль на границах области, то по теореме § 4 гл. XIX они тождественно равны нулю внутри области. Таким образом, в ТЕМ-волне

$$E_\varphi = E_r = 0.$$

Из соотношений, приведенных в задаче 3 к § 3, получим соотношения:

$$\frac{\partial E_r}{\partial \varphi} = 0, \quad \frac{\partial r H_r}{\partial r} = 0, \quad E_r = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} H_\varphi.$$

Первое и последнее из них показывают, что поле ТЕМ-волны в коаксиальном кабеле не зависит от φ. Второе и последнее дают

$$H_\varphi = \frac{A}{r}, \quad E_r = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \frac{A}{r},$$

где A — постоянная. Таким образом, в силу (34), поле ТЕМ-волны в коаксиальном кабеле с точностью до произвольного множителя определяется выражениями

$$\mathscr{H}_\varphi = \frac{e^{ik(z - c_1 t)}}{r}, \quad \mathscr{E}_r = \frac{c^{ik(z - c_1 t)}}{r}. \tag{55}$$

Перейдем к ТМ- и ТЕ-волнам. Их продольные компоненты удовлетворяют уравнениям Гельмгольца (44) и (55) и граничным условиям

$$E_z \Big|_{\substack{r = r_i \\ r = r_a}} = 0, \quad \frac{\partial H_z}{\partial r} \Big|_{\substack{r = r_i \\ r = r_a}} = 0, \tag{56}$$

где r_i и r_a — радиусы внутренней и внешней цилиндрической поверхностей. Как и в § 4 и 5, частные решения этих уравнений могут быть представлены в виде произведения

$$Z_n(\delta_{nm} r)(A_{nm} \cos n\varphi + B_{nm} \sin n\varphi), \tag{57}$$

где Z_n — цилиндрическая функция порядка n, n — произвольное целое положительное число, δ_{nm} — собственнсе значение соответствующей задачи. В отличие от случая волноводов круглого сечения теперь, однако, нет оснований отбрасывать те решения второго из уравнений (46), которые при $r = 0$ обращались в бесконечность, поскольку точка $r = 0$ не принадлежит полю. Поэтому следует положить

$$Z_n(\delta_{nm} r) = a_n J_n(\delta_{nm} r) + b_n Y_n(\delta_{nm} r),$$

что, в силу граничных условий (56), в случае ТМ-волн приведет к следующим уравнениям относительно a_n и b_n:

$$\left.\begin{aligned} a_n J_n(\delta_{nm} r_i) + b_n Y_n(\delta_{nm} r_i) = 0, \\ a_n J_n(\delta_{nm} r_a) + b_n Y_n(\delta_{nm} r_a) = 0. \end{aligned}\right\} \tag{58}$$

Отличные от нуля решения этой системы существуют только тогда, когда ее определитель обращается в нуль, т. е. если

$$J_n(\delta_{nm}r_i)\,Y_n(\delta_{nm}r_a) - J_n(\delta_{nm}r_a)\,Y_n(\delta_{nm}r_i) = 0. \tag{59}$$

Этим уравнением определяются для данного n собственные значения δ_{n1}, δ_{n2}, ..., дающие решение задачи.

В случае TE-волн в систему для определения коэффициентов a_n и b_n войдут не функции J_n и Y_n, а их производные по r.

Дальнейшее исследование распространения волн в коаксиальном кабеле предоставляется читателю. Для определения корней уравнения (59) могут быть использованы таблицы, приведенные Янке и Эмде [63].

ЗАДАЧА

Изучить случай, когда $r \to \infty$ (цилиндрический провод).

§ 7. Волны в диэлектрическом стержне

Выше мы рассматривали волноводы, осуществляемые с помощью проводящих поверхностей. Замечательно, что волновод может быть осуществлен в виде стержня из диэлектрика.

Рассмотрим такой стержень, имеющий форму круглого цилиндра радиуса r_0 и находящийся в диэлектрической среде. В дальнейшем индексом a будем обозначать величины, относящиеся к среде и полю в ней, сохраняя для поля в стержне те же обозначения, что были приняты в предыдущих параграфах для поля внутри волноводов с проводящими стенками. Задачу будем рассматривать в цилиндрических координатах r, φ, z с осью z, направленной по оси стержня.

Общая схема решения остается той же, что была изложена в § 3 и применена в § 4. Для решения задачи также достаточно найти только продольную компоненту электрического вектора, после чего остальные компоненты могут быть найдены простым дифференцированием (см. задачу 2 к § 3). Однако в рассматриваемом случае эта компонента будет удовлетворять двум уравнениям Гельмгольца вида (44), одно из которых будет относиться к стержню, а другое — к среде. Именно, для поля в стержне будем иметь уравнение

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial E_z}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial E_z}{\partial \varphi} + \delta^2 E_z = 0, \tag{60}$$

$$\delta^2 = \frac{\omega^2 \varepsilon\mu}{c^2} - \gamma^2, \tag{61}$$

а для поля в среде — уравнение

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial E_{za}}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial E_{za}}{\partial \varphi} + \delta_a^2 E_{za} = 0, \tag{62}$$

$$\delta_a^2 = \frac{\omega^2 \varepsilon_a^2 \mu_a^2}{c^2} - \gamma_a^2. \tag{63}$$