Отличные от нуля решения этой системы существуют только тогда, когда ее определитель обращается в нуль, т. е. если

$$J_n(\delta_{nm}r_i)Y_n(\delta_{nm}r_a)-J_n(\delta_{nm}r_a)Y_n(\delta_{nm}r_i)=0. \tag{59}$$

Этим уравнением определяются для данного n собственные значения δ_{n1}, δ_{n2}, ..., дающие решение задачи.

В случае ТЕ-волн в систему для определения коэффициентов a_n и b_n войдут не функции J_n и Y_n, а их производные по r.

Дальнейшее исследование распространения волн в коаксиальном кабеле предоставляется читателю. Для определения корней уравнения (59) могут быть использованы таблицы, приведенные Янке и Эмде [63].

ЗАДАЧА

Изучить случай, когда $r\to\infty$ (цилиндрический провод).

§ 7. Волны в диэлектрическом стержне

Выше мы рассматривали волноводы, осуществляемые с помощью проводящих поверхностей. Замечательно, что волновод может быть осуществлен в виде стержня из диэлектрика.

Рассмотрим такой стержень, имеющий форму круглого цилиндра радиуса r_0 и находящийся в диэлектрической среде. В дальнейшем индексом a будем обозначать величины, относящиеся к среде и полю в ней, сохраняя для поля в стержне те же обозначения, что были приняты в предыдущих параграфах для поля внутри волноводов с проводящими стенками. Задачу будем рассматривать в цилиндрических координатах r, φ, z с осью z, направленной по оси стержня.

Общая схема решения остается той же, что была изложена в § 3 и применена в § 4. Для решения задачи также достаточно найти только продольную компоненту электрического вектора, после чего остальные компоненты могут быть найдены простым дифференцированием (см. задачу 2 к § 3). Однако в рассматриваемом случае эта компонента будет удовлетворять двум уравнениям Гельмгольца вида (44), одно из которых будет относиться к стержню, а другое — к среде. Именно, для поля в стержне будем иметь уравнение

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial E_z}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial E_z}{\partial\varphi}+\delta^2E_z=0, \tag{60}$$

$$\delta^2=\frac{\omega^2\varepsilon\mu}{c^2}-\gamma^2, \tag{61}$$

а для поля в среде — уравнение

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial E_{za}}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial E_{za}}{\partial\varphi}+\delta_a^2E_{za}=0, \tag{62}$$

$$\delta_a^2=\frac{\omega^2\varepsilon_a^2\mu_a^2}{c^2}-\gamma_a^2. \tag{63}$$

Здесь мы, с учетом формулы (26), явно выписали выражение (45) для параметров δ и δ_a.

Покажем возможность распространения вдоль электрического стержня незатухающих ТМ-волн с амплитудой, быстро убывающей при удалении от стержня.

При распространении ТМ-волн на границе стержня должны удовлетворяться условия сопряжения (63) гл. XXIX, заключающиеся в равенстве тангенциальных компонент поля внутри и вне стержня:

$$E_z = E_{za}, \quad E_\varphi = E_{\varphi a}, \quad H_\varphi = H_{\varphi a}, \quad \text{когда} \quad r = r_0.$$

Здесь отсутствует условие для компонент H_z, H_{za}, так как в ТМ-волнах они равны нулю. Из уравнений, приведенных в задаче 2 к § 3, следует, что эти условия эквивалентны следующим:

$$E_z \big|_{r=r_0} = E_{za} \big|_{r=r_0}, \tag{64}$$

$$\frac{\gamma}{\delta^2} \frac{\partial E_z}{\partial \varphi}\bigg|_{r=r_0} = \frac{\gamma_a}{\delta_a^2} \frac{\partial E_{za}}{\partial \varphi}\bigg|_{r=r_0}, \tag{65}$$

$$\frac{\varepsilon}{\delta^2} \frac{\partial E_z}{\partial r}\bigg|_{r=r_0} = \frac{\varepsilon_a}{\delta_a^2} \frac{\partial E_{za}}{\partial r}\bigg|_{r=r_0}, \tag{66}$$

куда входят уже только компоненты E_z и E_{za}.

Кроме уравнений (60) и (62), продольная компонента электрического вектора должна удовлетворять также уравнениям вида (21):

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2} + \gamma^2 E_z = 0, \quad \frac{\partial^2 E_{za}}{\partial z^2} + \gamma_a^2 E_{za} = 0, \tag{67}$$

определяющим ее зависимость от координаты z. Как мы видели в § 3, из числа решений этих уравнений следует выбрать те, для которых зависимость от координаты z давалась бы множителями вида $e^{i\gamma z}$ и $e^{i\gamma_a z}$. Из условия равенства тангенциальных компонент при этом сразу вытекает, что

$$\gamma_a = \gamma. \tag{68}$$

Как мы знаем (гл. XXIV § 4), частные решения системы уравнений (60), (62) и (67), имеющие требуемую зависимость от координаты z и период 2π по угловой координате φ, могут быть записаны в форме:

$$E_z = A_n Z_n(\delta r)\, e^{i\gamma z} \cos(n\varphi + \psi_n), \tag{69}$$

$$E_z = B_n Z_n(\delta_a r)\, e^{i\gamma_a z} \cos(n\varphi + \psi_{na}), \tag{70}$$

где A_n, B_n, ψ_n, ψ_{na} — постоянные, а $Z_n(\delta r)$ и $Z_n(\delta_a r)$ — цилиндрические функции.

Для компоненты электрического вектора в среде, окружающей стержень, будем искать решения, быстро убывающие с ростом r. Из асимптотических формул гл. XIII следует, что решениями уравнения Бесселя, быстро убывающими с ростом аргумента, являются функции Ханкеля первого рода $H_n^{(1)}(\zeta)$ при мнимом значении аргумента. Поэтому положим:

$$Z_n(\delta_a r) = H_n^{(1)}(i\beta r),$$

где β — вещественное число и

$$i\beta \equiv \delta_a. \tag{71}$$

От функций Ханкеля с мнимым аргументом удобнее перейти к функциям Макдональда (гл. XIII, § 7):

$$K_n(\zeta) = \frac{\pi}{2} i^{n+1} H_n^{(1)}(i\zeta),$$

имеющим вещественные значения при всех вещественных значениях ζ. При этом выражение (70) можем записать в виде:

$$E_{za} = B_n K_n(\beta r) e^{i\gamma z} \cos(n\varphi + \psi_{na}). \tag{72}$$

Так как поле в стержне должно быть ограничено, то в выражении (69) следует положить

$$Z_n(\delta r) = J_n(\delta r),$$

что даст

$$E_z = A_n J_n(\delta r) e^{i\gamma z} \cos(n\varphi + \psi_n). \tag{73}$$

Подставив найденные выражения в граничное условие (64), получим:

$$A_n J_n(\delta r_0) \cos(n\varphi + \psi_n) = B_n K_n(\beta r_0) \cos(n\varphi + \psi_{na}).$$

Так как функции $J_n(\zeta)$ и $K_n(\zeta)$ не имеют общих корней, это соотношение может выполняться при всех значениях φ только при условии

$$\cos(n\varphi + \psi_n) = \cos(n\varphi + \psi_{na}),$$

откуда следует, что

$$\psi_n = \psi_{na}. \tag{74}$$

Обратимся к граничному условию (65). При $n = 0$, т. е. для TM-волн с амплитудой, зависящей только от координаты r, оно выполняется тождественно. Если же $n \neq 0$, то из равенств (68) и (71) и выражений для $E_z = E_{za}$ следует, что граничное условие (65) эквивалентно следующему:

$$\frac{1}{\delta^2} E_z = -\frac{1}{\beta} E_{za}.$$

Отсюда, в силу граничного условия (64), вытекает условие

$$\beta^2 = -\delta^2, \quad \text{когда} \quad n \neq 0, \tag{75}$$

которое, с учетом соотношений (61) и (63), может быть записано в форме:

$$\varepsilon_a \mu_a = \varepsilon\mu, \quad \text{когда} \quad n \neq 0. \tag{76}$$

Следовательно, в общем случае, при $\varepsilon_a\mu_a \neq \varepsilon\mu$, ТМ-волн интересующего нас типа с индексом $n \neq 0$ в диэлектрическом стержне существовать не может.

Перейдем, наконец, к граничному условию (66). С помощью рекурентных формул гл. XIII найдем, что

$$\frac{\partial}{\partial r} J_n(\delta r) = \frac{n}{r} J_n(\delta r) - \delta J_{n+1}(\delta r),$$
$$\frac{\partial}{\partial r} K_n(\beta r) = \frac{n}{r} K_n(\beta r) - \beta K_{n+1}(\beta r).$$

Поэтому, подставив в граничное условие (66) выражения (72) и (73), получим:

$$\frac{\varepsilon}{\delta^2}\left[n - \frac{\delta r_0 J_{n+1}(\delta r_0)}{J_n(\delta r_0)}\right] = -\frac{\varepsilon_a}{\beta^2}\left[n - \frac{\beta r_0 K_{n+1}(\beta r_0)}{K_n(\beta r_0)}\right]. \tag{77}$$

Присоединим к этому уравнению также соотношения:

$$\delta^2 = \frac{\omega^2\varepsilon\mu}{c^2} - \gamma^2, \tag{78}$$

$$\beta^2 = \gamma^2 - \frac{\omega^2\varepsilon_a\mu_a}{c^2}. \tag{79}$$

Три уравнения (77)—(79) связывают четыре величины β, δ, γ и ω. Одна из них, например ω, может быть поэтому задана независимо от других, после чего из уравнений (77)—(79) определятся значения β, δ и γ. Как было установлено, для быстрого убывания поля при удалении от стержня параметр β должен быть вещественным. Постоянная распространения γ также должна быть вещественной, так как иначе волны будут затухать в направлении распространения. Таким образом, возникает вопрос, имеют ли уравнения (77)—(79) в некоторой области изменения ω вещественные решения для γ и β, совместимые с граничными условиями.

Предположим сначала, что выполнено условие (76). Тогда либо параметры δ и β оба равны нулю, либо при вещественном значении β параметр δ имеет мнимое значение. Читателя не затруднит показать, что при $\beta = \delta = 0$ волны интересующего нас типа невозможны. Поэтому остается только вторая возможность, о которой мы скажем ниже.

Перейдем к общему случаю. Если число γ вещественно, то из формулы (78) вытекает, что параметр δ имеет либо вещественное, либо чисто мнимое значение.

Предположим второе. Тогда $\delta = i\varkappa$, где $\varkappa$ — вещественное число. С помощью указанной в гл. XIII формулы:

$$I_n(\zeta) = i^{-n} J_n(\zeta),$$

преобразуем выражение (73) к виду

$$E_z = A_n^* I_n(\varkappa r)\, e^{i\gamma z} \cos(n\varphi + \psi_n), \tag{80}$$

где A_n^* — постоянная. Подставив это выражение, а также выражение (72) для E_{za}, в граничное условие (64), найдем, что

$$A_n^* I_n(\varkappa r_0) = B_n K_n(\beta r_0).$$

Так как функции $I_n(\varkappa r_0)$ и $K_n(\beta r_0)$ неотрицательны, то постоянные A_n^* и B_n одного знака. Подставим теперь выражения (80) и (72) в граничное условие (66), что приведет нас к уравнению

$$\frac{\varepsilon}{\varkappa} A_n^* I'_n(\varkappa r_0) = \frac{\varepsilon_a}{\beta} B_n K'_n(\beta r_0).$$

Это уравнение неразрешимо, так как его левая и правая части, при A_n^*, $B_n \neq 0$, отличны от нуля и имеют разные знаки при всех $\varkappa$, β и n. В самом деле, функции $I_n(\zeta)$ монотонно растут с ростом аргумента ζ, а функции $K_n(\zeta)$ — монотонно убывают. Поэтому производные $I'_n(\varkappa r)$ и $K'_n(\varkappa r_0)$ имеют разные знаки, из чего и вытекает сделанное утверждение.

Таким образом, при мнимом значении параметра δ мы не можем удовлетворить граничным условиям и, следовательно, интересующих нас решений не существует. Поэтому их не может быть и при условии (76), следствием которого является невозможность вещественных значений δ при вещественных значениях γ и β. В соответствии со смыслом условия (76), отсюда вытекает, что ТМ-волны интересующего нас вида при $n \neq 0$ вообще невозможны.

Предположим теперь, что $n = 0$ и параметр δ имеет вещественное значение. Покажем, что при этом уравнения (77—79) в некоторой области изменения ω имеют вещественные решения для β и γ, если

$$\varepsilon\mu > \varepsilon_a \mu_a. \tag{81}$$

Необходимость последнего условия ясна, если сложить уравнения (78) и (79) и заметить, что $\delta^2 + \beta^2 > 0$. Достаточность вытекает из следующего.

Зададим некоторое отличное от нуля значение величины β. Правая часть уравнения (77) примет при этом фиксированное значение. Будем теперь изменять δ. Так как функции $J_0(\zeta)$ и $J_1(\zeta)$ не имеют общих корней, то отношение

$$v(\delta r_0) = \frac{J_1(\delta r_0)}{J_0(\delta r_0)}$$

с ростом δ будет бесконечное множество раз принимать неограниченно большие и неограниченно малые значения. В силу непрерывности отношения $v(\delta r_0)$ при $J_0(\delta r_0) \neq 0$, среди этих значений будут и такие, и притом в неограниченном числе, для которых уравнение (77) будет удовлетворяться. Таким образом, каждому фиксированному значению β будет соответствовать бесчисленное множество неограниченно возрастающих с ростом индекса m значений $\delta = \delta_{0m}(\beta)$, $m = 0, 1, 2, \ldots$, являющихся корнями уравнения (77).

Ввиду непрерывности правой части уравнения (77) величины $\delta_{0m}(\beta)$ явятся непрерывными функциями β

Подставив $\delta=\delta_{0m}(\beta)$ в уравнение (78) и сложив последнее с уравнением (79), получим соотношение

$$\frac{\omega^2}{c^2}(\varepsilon\mu-\varepsilon_a\mu_a)=\delta_{0m}^2(\beta)+\beta^2, \tag{82}$$

которое, при выполнении условия (81), в некоторой области изменения частоты ω определит параметры β и $\delta_{0m}(\beta)$, как непрерывные вещественные функции $\beta_0(\omega)$ и $\delta_{0m}(\omega)$ от ω. Наконец, из уравнения (79) найдем, что

$$\gamma^2=\beta_{0m}^2(\omega)+\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_a\mu_a>0. \tag{83}$$

Таким образом, при вещественных значениях δ в некоторой области изменения ω система уравнений (77)—(79) действительно имеет вещественные корни. Это завершает доказательство существования ТМ-волн, указанного в начале параграфа типа.

Определим область частот, для которой ТМ-волны распространяются в диэлектрическом стержне без затухания.

Так как, по доказанному, любому вещественному значению β соответствует набор значений $\delta_{0m}^2(\beta)>0$, из соотношения (82) заключим, что любому достаточно большому значению частоты ω соответствует вещественное значение параметра β. Но тогда из соотношения (83) вытекает, что и $\gamma^2>0$. Поэтому сверху область частот, для которых ТМ-волны распространяются в стержне без затухания, не ограничена.

Наоборот, из соотношения (82) следует, что частота волны с данным m снизу ограничена критическим значением

$$\omega_{0m}=\frac{M(m)}{\frac{1}{c}\sqrt{\varepsilon\mu-\varepsilon_a\mu_a}},$$

где $M(m)$ — наименьшее значение выражения $\sqrt{\delta_{0m}^2(\beta)+\beta^2}$.

Определим наинизшую критическую частоту ω_0.

Уравнение (77) при $n=0$ имеет вид:

$$\frac{\delta J_0(\delta r_0)}{\varepsilon J_1(\delta r_0)}=-\frac{\beta K_0(\beta r_0)}{\varepsilon_a K_1(\beta r_0)}. \tag{84}$$

Из выражения (72) следует, что критические условия, при которых поле вне стержня перестает экспоненциально убывать с ростом r, достигаются при $\beta=0$. Уравнение (84) при $\beta=0$ принимает вид:

$$\delta J_0(\delta r_0)=0.$$

Корень $\delta=0$, в силу формул (82) и (83), соответствует значениям $\omega=\gamma=0$, при которых нет бегущей волны. Следующий корень равен

$$\delta_{01}\frac{\alpha_{01}}{r_0},$$

где $\alpha_{01}=2{,}405$ — наименьший корень уравнения $J_0(\zeta)=0$. С помощью формул (82) и (79) найдем теперь искомую наинизшую критическую частоту:

$$\omega_0=\omega_{01}=\frac{c\alpha_{01}}{r_0\sqrt{\varepsilon\mu-\varepsilon_a\mu_a}}$$

и соответствующее ей значение постоянной

$$\gamma=\frac{\alpha_{01}}{r_0\sqrt{\frac{\varepsilon\mu}{\varepsilon_a\mu_a}-1}}.$$

ЗАДАЧИ

1. Показать, что TE-волн с $n>0$, быстро затухающих при удалении от диэлектрического стержня, вдоль стержня распространяться не может.

2. Введя векторы Герца (гл. XXIX, § 3), показать, что вдоль диэлектрического стержня, имеющего форму кругового цилиндра, могут распространяться волны, представляющие линейную комбинацию TE- и TM-волн.

Указание. Компоненты z векторов Герца следует задать в виде:

$$\left.\begin{aligned}\Pi_z&=A_nJ_n(\delta r)\,e^{i\gamma z}\sin(n\varphi+\psi_n),\\ \Pi_z^*&=A_n^*J_n(\delta r)\,e^{i\gamma z}\cos(n\varphi+\psi_n),\end{aligned}\right\}\ r<r_0,$$

$$\left.\begin{aligned}\Pi_z&=B_nK_n(\delta_a r)\,e^{i\gamma z}\sin(n\varphi+\psi_n),\\ \Pi_z^*&=B_n^*K_n(\delta_a r)\,e^{i\gamma z}\cos(n\varphi+\psi_n).\end{aligned}\right\}\ r>r_0.$$

Глава XXXI

ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ РУПОРЫ И РЕЗОНАТОРЫ

§ 1. Секториальный рупор и секториальный резонатор

Введем цилиндрические координаты r, φ, z и рассмотрим бесконечную область $0\leqslant z\leqslant a$, $0\leqslant\varphi\leqslant\alpha$, где a и α — положительные постоянные. Эту область будем называть *секториальным рупором*, а ее границу — *стенками рупора*. Стенки рупора будем считать идеально проводящими, а рупор заполненным идеальным диэлектриком с $\varepsilon=\mu=1$, $\sigma=0$.

Изучим возможные типы бегущих электромагнитных волн в секториальном рупоре. Для этого воспользуемся развитым в § 8 гл. XXIX представлением электромагнитного поля с помощью скалярных функций u и v.

Рассмотрим, например, решения уравнений Максвелла для рупора, представляющие *волны электрического типа*, т. е. волны, для которых компонента H_z магнитного вектора равна нулю. Эти