равен

$$\delta_{01}\frac{\alpha_{01}}{r_0},$$

где $\alpha_{01}=2{,}405$ — наименьший корень уравнения $J_0(\zeta)=0$. С помощью формул (82) и (79) найдем теперь искомую наинизшую критическую частоту:

$$\omega_0=\omega_{01}=\frac{c\alpha_{01}}{r_0\sqrt{\varepsilon\mu-\varepsilon_a\mu_a}}$$

и соответствующее ей значение постоянной

$$\gamma=\frac{\alpha_{01}}{r_0\sqrt{\dfrac{\varepsilon\mu}{\varepsilon_a\mu_a}-1}}.$$

ЗАДАЧИ

1. Показать, что TE-волн с $n>0$, быстро затухающих при удалении от диэлектрического стержня, вдоль стержня распространяться не может.

2. Введя векторы Герца (гл. XXIX, § 3), показать, что вдоль диэлектрического стержня, имеющего форму кругового цилиндра, могут распространяться волны, представляющие линейную комбинацию TE- и TM-волн.

Указание. Компоненты z векторов Герца следует задать в виде:

$$\left.\begin{aligned}\Pi_z&=A_nJ_n(\delta r)e^{i\gamma z}\sin(n\varphi+\psi_n),\\ \Pi_z^*&=A_n^*J_n(\delta r)e^{i\gamma z}\cos(n\varphi+\psi_n),\end{aligned}\right\}\ r<r_0,$$

$$\left.\begin{aligned}\Pi_z&=B_nK_n(\delta_a r)e^{i\gamma z}\sin(n\varphi+\psi_n),\\ \Pi_z^*&=B_n^*K_n(\delta_a r)e^{i\gamma z}\cos(n\varphi+\psi_n).\end{aligned}\right\}\ r>r_0.$$

Глава XXXI

ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ РУПОРЫ И РЕЗОНАТОРЫ

§ 1. Секториальный рупор и секториальный резонатор

Введем цилиндрические координаты r, φ, z и рассмотрим бесконечную область $0\leqslant z\leqslant a$, $0\leqslant\varphi\leqslant\alpha$, где a и α — положительные постоянные. Эту область будем называть *секториальным рупором*, а ее границу — *стенками рупора*. Стенки рупора будем считать идеально проводящими, а рупор заполненным идеальным диэлектриком с $\varepsilon=\mu=1$, $\sigma=0$.

Изучим возможные типы бегущих электромагнитных волн в секториальном рупоре. Для этого воспользуемся развитым в § 8 гл. XXIX представлением электромагнитного поля с помощью скалярных функций u и v.

Рассмотрим, например, решения уравнений Максвелла для рупора, представляющие *волны электрического типа*, т. е. волны, для которых компонента H_z магнитного вектора равна нулю. Эти волны выражаются через функцию u формулами (82)—(83) гл. XXIX, которые в рассматриваемом нами случае примут вид:

$$E_r = \frac{\partial^2 u}{\partial r\, \partial z}, \quad E_\varphi = \frac{1}{r}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi\, \partial z}, \quad E_z = \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + k^2 u; \tag{1}$$

$$H_r = -\frac{ik}{r}\frac{\partial u}{\partial \varphi}, \quad H_\varphi = ik\frac{\partial u}{\partial r}, \quad H_z = 0, \tag{2}$$

где

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}. \tag{3}$$

Функция u должна удовлетворять уравнению (80) гл. XXIX, представляющему в рассматриваемой задаче уравнение Гельмгольца:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + k^2 u = 0. \tag{4}$$

На стенках рупора тангенциальные составляющие электрического вектора должны обращаться в нуль (гл. XXIX, § 7), т. е. должно быть:

$$E_r = E_\varphi = 0, \quad \text{когда} \quad z = 0 \text{ и } z = a, \tag{5}$$

$$E_r = E_z = 0, \quad \text{когда} \quad \varphi = 0 \text{ и } \varphi = \alpha. \tag{6}$$

Чтобы удовлетворить этим условиям, необходимо положить:

$$\frac{\partial u}{\partial z} = 0, \quad \text{когда} \quad z = 0 \text{ и } z = a, \tag{7}$$

$$u = 0, \text{ когда } \varphi = 0 \text{ и } \varphi = \alpha. \tag{8}$$

Будем искать решения задачи (4)—(8) вида:

$$u = u_1(r)\, u_2(\varphi)\, u_3(z).$$

Общее выражение для решений уравнения Гельмгольца этого вида дается формулой (50) гл. XXIV:

$$u = AZ_n(\mu r)\cos(n\varphi + \psi_n)\cos(\nu z + \psi_\nu), \tag{9}$$

где

$$\mu^2 + \nu^2 = k^2,$$

A — произвольная постоянная, а $Z_n(\mu r)$ — решение уравнения Бесселя. Подставив это выражение в условия (8) и (9) найдем, что

$$\psi_n = \frac{\pi}{2}, \qquad n = \frac{\pi}{\alpha} m \tag{10}$$

$$\psi_\nu = 0, \quad \nu = \frac{\pi}{a} l \qquad (m,\ l = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$$

$$\mu^2 = k^2 - \frac{\pi^2}{a^2} l^2.$$

В качестве функций $Z_n(\mu r)$ выберем функции Ханкеля первого рода $H_n^{(1)}(\mu r)$. Как мы знаем (гл. XXIV, § 5), при таком выборе функций $Z_n(\mu r)$ (и только при таком выборе) наше решение представит систему бегущих волн, расходящихся на бесконечности. При $r=0$ наше решение будет испытывать бесконечный разрыв. Это должно быть интерпретировано в том смысле, что отрезок $r=0$, $0 \leqslant z \leqslant a$ представляет *линейный источник волн.* Введения разрывного решения можно было бы избежать, исключив из рассматриваемой области сектор $r < \varepsilon$ и задав ток на его границе $r=\varepsilon$, который играл бы роль источника поля. В общем выражении для решения это, однако, ничего бы не изменило.

Таким образом, общее выражение функции u для бегущей волны электрического типа в секториальном рупоре имеет вид:

$$u_{ml} = A_{ml} H^{(1)}_{\frac{\pi}{\alpha} m} (\mu r) \sin \pi m \frac{\varphi}{\alpha} \cos \pi l \frac{z}{a}, \tag{11}$$

$$\mu = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\pi^2}{a^2} l^2}, \tag{12}$$

где вместо k^2 подставлено его выражение (3). Отметим, что в отличие от ранее рассматривавшихся нами задач, в этом решении фигурируют бесселевы функции, порядок которых, вообще говоря, не является целым.

Рассмотрим некоторые особенности бегущих волн электрического типа в секториальном рупоре. Для этого воспользуемся асимптотическим выражением (64) гл. XIII для функций Ханкеля 1-го рода, из которого найдем, что при достаточно больших значениях r:

$$H^{(1)}_{\frac{\pi}{\alpha} m} (\mu r) \approx \sqrt{\frac{2\pi}{\mu r}} e^{-i \frac{\pi}{2} \left(\frac{\pi}{\alpha} m + \frac{1}{2} \right)} e^{i \mu r}. \tag{13}$$

Предположим, что

$$\omega > \pi c \frac{l}{a}. \tag{14}$$

При этом число μ вещественно и из выражения (13) следует, что бегущие волны в секториальном рупоре распространяются при больших r с фазовой скоростью c, а их амплитуда с ростом r убывает как $\frac{1}{\sqrt{r}}$.

Если же неравенство (14) имеет обратный знак, то бегущие волны вообще невозможны. В самом деле, при этом $\mu = i\varkappa$, где $\varkappa$ — вещественное число. Следовательно,

$$H^{(1)}_{\frac{\pi}{\alpha} m} (\mu r) = H^{(1)}_{\frac{\pi}{\alpha} m} (i \varkappa r) \sim \sqrt{\frac{2\pi}{i \varkappa r}} e^{-\varkappa r} e^{-\frac{i\pi}{2} \left(\frac{\pi}{\alpha} m + \frac{1}{2} \right)}.$$

Умножив это выражение на $e^{-i\omega t}$, убедимся, что ему соответствует система *стоячих волн* с амплитудой, убывающей по показательному закону. Таким образом, существует некоторая критическая частота

$$\omega_{0l}=\pi c\frac{l}{a}\ (l=0,\ 1,\ 2,\ \ldots), \tag{15}$$

такая, что при всех меньших частотах бегущие волны с данным l невозможны. При этом значению $l=0$ соответствует волна, не зависящая от координаты z. Эта волна может быть бегущей при всех частотах. При $l>1$ волны по координате z имеют периодическую структуру.

Введем длину волны

$$\lambda_{0l}=\frac{2\pi c}{\omega_{0l}},$$

соответствующую электромагнитным колебаниям с круговой частотой ω_{0l}. Из соотношения (15) найдем, что

$$l=\frac{2a}{\lambda_{0l}},$$

т. е. для возможности существования бегущей волны с $l\neq 0$, ее длина должна укладываться в интервале $2a$ не менее l раз.

Обратимся теперь к выражениям (1—2) для векторов поля. Нетрудно видеть, что в общем случае при больших значениях r компоненты E_r, E_z и H_φ векторов поля убывают с ростом r как $\frac{1}{\sqrt{r}}$, а компоненты E_φ и H_r — как $\frac{1}{r^{3/2}}$, т. е. ими, по сравнению с первыми тремя компонентами, можно пренебречь. Если, кроме того, $l=0$, то $E_r=0$ и существенны только компоненты E_z и H_φ, т. е. волна близка к чисто поперечной.

Предположим теперь, что с помощью идеально проводящей перегородки, поверхность которой расположена при $r=b$, мы отделили конечную часть рупора: $0\leqslant r\leqslant b$, $0\leqslant z\leqslant a$, $0\leqslant\varphi\leqslant\alpha$. Образовавшуюся при этом полость с идеально проводящими стенками назовем *секториальным резонатором*.

Как мы знаем (§ 2—3 гл. XXIV), в ограниченной области возможны *свободные колебания*. Поставим целью определить, какие именно колебания электрического типа возможны в секториальном резонаторе. Для этого надо найти собственные функции задачи для уравнения Гельмгольца (4) в области, занятой резонатором, при граничных условиях, соответствующих колебаниям электрического типа. Каждая из собственных функций и определит одно из возможных колебаний, которое не может быть представлено в виде наложения колебаний, соответствующих другим собственным функциям. Наоборот, ввиду полноты системы собственных функций, любое возможное колебание электрического типа сможет быть представлено в виде комбинации найденных нами колебаний.

К граничным условиям (5) и (6) для секториального резонатора добавится граничное условие

$$E_z = E_\varphi = 0, \quad \text{когда} \quad r = b.$$

Чтобы удовлетворить этому условию, надо положить

$$u = 0, \quad \text{когда} \quad r = b. \tag{16}$$

Далее потребуем, чтобы поле в резонаторе было ограничено, в силу чего в выражении (9) мы должны положить:

$$Z_n(\mu r) = J_n(\mu r).$$

Чтобы выполнялось граничное условие (16), числа μ должны удовлетворять уравнению

$$J_n(\mu b) = 0.$$

Через μ_{ms} ($s = 1, 2, 3, \ldots$) обозначим корни этого уравнения, перенумерованные в порядке их возрастания, при значении n, определенном соотношениями (10).

Выбор остальных величин в выражении (9) будет определен теми же условиями, как и для секториального рупора, вследствие чего собственные функции рассматриваемой задачи могут быть представлены в виде:

$$u_{mls} = A_{mls} J_{\frac{\pi}{\alpha} m}(\mu_{ms} r) \sin \pi m \frac{\varphi}{\alpha} \cos \pi l \frac{z}{a}$$

$$(m,\ s = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots;\ l = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots).$$

Колебания электрического типа, соответствующие этим собственным функциям, могут быть охарактеризованы тремя числами m, l, s.

Возможные частоты ω_{mls} колебаний найдем из соотношения (12), разрешив его относительно частот ω, что даст:

$$\omega_{mls} = c \sqrt{\pi^2 \frac{l^2}{a^2} + \mu_{ms}^2}.$$

Из этого выражения ясно, что наименьшая из частот свободных колебаний равна

$$\omega_{101} = c\mu_{11}.$$

ЗАДАЧА

Показать, что компоненты векторов поля для волн магнитного типа в секториальном рупоре могут быть вычислены по формулам:

$$E_r = \frac{ik}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi}, \quad E_\varphi = -ik \frac{\partial v}{\partial r}, \quad E_z = 0,$$

$$H_r = \frac{\partial^2 v}{\partial r\, \partial z}, \quad H_\varphi = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 v}{\partial \varphi\, \partial z}, \quad H_z = \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + k^2 v,$$

где v — решение уравнения (4), удовлетворяющее граничным условиям

$$v=0, \quad \text{когда} \quad z=0 \quad \text{и} \quad z=a,$$
$$\frac{\partial v}{\partial \varphi}=0, \quad \text{когда} \quad \varphi=0 \quad \text{и} \quad \varphi=\alpha.$$

§ 2. Сферический резонатор

Сферическую полость в проводящем материале называют *сферическим резонатором*. Найдем возможные типы электромагнитных колебаний в такой полости. При этом стенки полости будем считать идеально проводящими, а среду в полости — идеальным диэлектриком с $\varepsilon=\mu=1$.

Как и в предыдущем параграфе, с математической точки зрения рассматриваемая задача приведется к задаче на разыскание собственных функций для сферической области.

Введем сферические координаты r, θ, φ с началом в центре полости. В § 8 гл. XXIX мы видели, что электромагнитные поля электрического и магнитного типа в сферических координатах могут быть выражены с помощью потенциалов Дебая $\bar{u}$ и $\bar{v}$, удовлетворяющих уравнению Гельмгольца. Так как потенциал Дебая: $\bar{u}=\frac{u}{r}$, где u — функция, введенная в § 8 гл. XXIX, из соотношений (82)—(83) гл. XXIX найдем, что компоненты векторов поля электрического типа могут быть выражены через потенциал Дебая $\bar{u}$ с помощью формул:

$$E_r=\frac{\partial}{\partial r}r\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial r}+\frac{\bar{u}}{r}\right)+k^2 r\bar{u}, \quad E_\theta=\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial r}+\frac{\bar{u}}{r}\right),$$
$$E_\varphi=\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial r}+\frac{\bar{u}}{r}\right); \quad H_r=0, \quad H_\theta=-\frac{ik}{c}\frac{\partial \bar{u}}{\partial \varphi}, \quad H_\varphi=\frac{ik}{c}\frac{\partial \bar{u}}{\partial \theta}.$$

Аналогично, с помощью формул (84)—(85) гл. XXIX, найдем, что компоненты векторов поля магнитного типа могут быть выражены через потенциал Дебая $\bar{v}$ с помощью формул:

$$E_r=0, \quad E_\theta=\frac{ik}{c}\frac{\partial \bar{v}}{\partial \varphi}, \quad E_\varphi=-\frac{ik}{c}\frac{\partial \bar{v}}{\partial \theta};$$
$$H_r=\frac{\partial}{\partial r}r\left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial r}+\frac{\bar{v}}{r}\right)+k^2 r\bar{v}, \quad H_\theta=\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial r}+\frac{\bar{v}}{r}\right),$$
$$H_\varphi=\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial r}+\frac{\bar{v}}{r}\right).$$

На границе $r=a$ сферического резонатора должны выполняться условия:

$$E_\theta=E_\varphi=0, \quad \text{когда} \quad r=a,$$