где v — решение уравнения (4), удовлетворяющее граничным условиям

$$v=0, \quad \text{когда} \quad z=0 \quad \text{и} \quad z=a,$$
$$\frac{\partial v}{\partial \varphi}=0, \quad \text{когда} \quad \varphi=0 \quad \text{и} \quad \varphi=\alpha.$$

§ 2. Сферический резонатор

Сферическую полость в проводящем материале называют *сферическим резонатором*. Найдем возможные типы электромагнитных колебаний в такой полости. При этом стенки полости будем считать идеально проводящими, а среду в полости — идеальным диэлектриком с $\varepsilon=\mu=1$.

Как и в предыдущем параграфе, с математической точки зрения рассматриваемая задача приведется к задаче на разыскание собственных функций для сферической области.

Введем сферические координаты r, θ, φ с началом в центре полости. В § 8 гл. XXIX мы видели, что электромагнитные поля электрического и магнитного типа в сферических координатах могут быть выражены с помощью потенциалов Дебая $\bar{u}$ и $\bar{v}$, удовлетворяющих уравнению Гельмгольца. Так как потенциал Дебая: $\bar{u}=\frac{u}{r}$, где u — функция, введенная в § 8 гл. XXIX, из соотношений (82)—(83) гл. XXIX найдем, что компоненты векторов поля электрического типа могут быть выражены через потенциал Дебая $\bar{u}$ с помощью формул:

$$E_r=\frac{\partial}{\partial r} r\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial r}+\frac{\bar{u}}{r}\right)+k^2 r\bar{u}, \quad E_\theta=\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial r}+\frac{\bar{u}}{r}\right),$$
$$E_\varphi=\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial r}+\frac{\bar{u}}{r}\right); \quad H_r=0, \quad H_\theta=-\frac{ik}{c}\frac{\partial \bar{u}}{\partial \varphi}, \quad H_\varphi=\frac{ik}{c}\frac{\partial \bar{u}}{\partial \theta}.$$

Аналогично, с помощью формул (84)—(85) гл. XXIX, найдем, что компоненты векторов поля магнитного типа могут быть выражены через потенциал Дебая $\bar{v}$ с помощью формул:

$$E_r=0, \quad E_\theta=\frac{ik}{c}\frac{\partial \bar{v}}{\partial \varphi}, \quad E_\varphi=-\frac{ik}{c}\frac{\partial \bar{v}}{\partial \theta};$$
$$H_r=\frac{\partial}{\partial r} r\left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial r}+\frac{\bar{v}}{r}\right)+k^2 r\bar{v}, \quad H_\theta=\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial r}+\frac{\bar{v}}{r}\right),$$
$$H_\varphi=\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial r}+\frac{\bar{v}}{r}\right).$$

На границе $r=a$ сферического резонатора должны выполняться условия:

$$E_\theta=E_\varphi=0, \quad \text{когда} \quad r=a,$$

что приведет к следующим граничным условиям для потенциалов Дебая:

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial r} + \frac{\bar{u}}{r} = 0, \quad \text{когда} \quad r = a, \tag{17}$$

$$\bar{v} = 0, \quad \text{когда} \quad r = a. \tag{18}$$

В § 4 гл. XXIV мы рассмотрели решения уравнения Гельмгольца вида $u_1(r)\,u_2(\theta)\,u_3(\varphi)$ и нашли их общее выражение при $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$, $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$:

$$\frac{1}{\sqrt{r}} Z_{n+\frac{1}{2}}(kr)\, P_{nm}(\cos\theta) \cos(m\varphi + \psi_m), \tag{19}$$

где m и n — целые числа. Решение рассматриваемого вида регулярно при $r = 0$, если

$$Z_{n+\frac{1}{2}}(kr) = J_{n+\frac{1}{2}}(kr).$$

Введя обозначение

$$j_n(kr) \equiv \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{r}} J_{n+\frac{1}{2}}(kr),$$

преобразуем выражение (19) к виду

$$j_n(kr)\, P_{nm}(\cos\theta) \cos(m\varphi + \psi_m).$$

Подчинив это выражение граничному условию (17), получим собственные функции рассматриваемой задачи для уравнения Гельмгольца при этом граничном условии:

$$\bar{u}_{mnl} = j_n(k_l r) P_{nm}(\cos\theta) \cos(m\varphi + \psi_m), \tag{20}$$

где k_l, $l = 1, 2, 3, \ldots,$ — корни уравнения

$$kaj'_n(ka) + j_n(ka) = 0.$$

Аналогичным образом найдем собственные функции при граничном условии (18):

$$\bar{v}_{mnl} = j_n(k_l r)\, P_{nm}(\cos\theta) \cos(m\varphi + \psi_m), \tag{21}$$

где k_l, $l = 1, 2, 3, \ldots,$ — корни уравнения

$$j_n(ka) = 0.$$

Формулы (20) и (21) и дают ответ о возможных типах свободных электромагнитных колебаний в сферическом резонаторе.

ЗАДАЧИ

1. Показать, что каждой собственной частоте $\omega_l = k_l c$ электромагнитных колебаний в сферическом резонаторе соответствует $2n+1$ возможных типов колебаний.

2. Показать, что спектр частот собственных колебаний в сферическом резонаторе ограничен снизу, причем с ростом радиуса резонатора наинизшая из возможных частот собственных колебаний убывает.