Глава XXXII

РАЗЛОЖЕНИЕ ПО СОБСТВЕННЫМ ФУНКЦИЯМ ЗАДАЧИ ШТУРМА — ЛИУВИЛЛЯ

§ 1. Введение

В математической физике очень важны методы (например, метод Фурье, метод интегральных преобразований и др.), при которых решение задачи получается в форме ряда или интеграла, т. е. в виде разложения по некоторой системе функций. Такие разложения хорошо изучены, когда каждая из функций, по которым осуществляется разложение, зависит только от одной из переменных, встречающихся в задаче. Чтобы найти естественную систему функций, по которой можно осуществить разложение, обычно необходимо найти решение некоторой граничной задачи для обыкновенного дифференциального уравнения, получившей название *задачи Штурма — Лиувилля.* В этой главе рассмотрим элементы теории задачи Штурма — Лиувилля и сформулируем соответствующие *теоремы разложения.* Вместо того, чтобы стремиться сформулировать их в форме, когда они могут быть сравнительно просто доказаны, изберем другой путь: как правило, опуская доказательства, будем стремиться к изложению результатов в достаточно общем виде, диктуемом практическими потребностями. Полную теорию можно найти в [31], ряд результатов содержится также в [4] и [56].

В этой главе будем использовать следующие общепринятые обозначения замкнутых и открытых интервалов (x — вещественная переменная): $[a, b]$, если значения x удовлетворяют неравенству $a \leqslant x \leqslant b$; $(a, b]$, если $a < x \leqslant b$; $[a, b)$, если $a \leqslant x < b$; (a, b), если $a < x < b$. Используя знак принадлежности $\in$, будем писать: $x \in [a, b]$, если x — точка из $[a, b]$ и т. д.

Далее, символом C^2 обозначим класс (множество) функций, имеющих непрерывные вторые производные, а через C — класс непрерывных функций. Если φ — функция класса C^2, будем писать $\varphi \in C^2$ и т. п.

§ 2. Задача Штурма — Лиувилля

Рассмотрим обыкновенное линейное дифференциальное уравнение:

$$p_0 y'' + p_1 y' + (l + p_2) y = 0, \tag{1}$$

где p_0, p_1, p_2 — вещественные функции вещественной переменной $x \in [a, b]$, а l — *комплексный* параметр. Если при некотором x хотя бы один из коэффициентов p_0, p_1, p_2 имеет беско-