Глава XXXII

РАЗЛОЖЕНИЕ ПО СОБСТВЕННЫМ ФУНКЦИЯМ ЗАДАЧИ ШТУРМА—ЛИУВИЛЛЯ

§ 1. Введение

В математической физике очень важны методы (например, метод Фурье, метод интегральных преобразований и др.), при которых решение задачи получается в форме ряда или интеграла, т. е. в виде разложения по некоторой системе функций. Такие разложения хорошо изучены, когда каждая из функций, по которым осуществляется разложение, зависит только от одной из переменных, встречающихся в задаче. Чтобы найти естественную систему функций, по которой можно осуществить разложение, обычно необходимо найти решение некоторой граничной задачи для обыкновенного дифференциального уравнения, получившей название *задачи Штурма—Лиувилля*. В этой главе рассмотрим элементы теории задачи Штурма—Лиувилля и сформулируем соответствующие *теоремы разложения*. Вместо того, чтобы стремиться сформулировать их в форме, когда они могут быть сравнительно просто доказаны, изберем другой путь: как правило, опуская доказательства, будем стремиться к изложению результатов в достаточно общем виде, диктуемом практическими потребностями. Полную теорию можно найти в [31], ряд результатов содержится также в [4] и [56].

В этой главе будем использовать следующие общепринятые обозначения замкнутых и открытых интервалов (x—вещественная переменная): $[a, b]$, если значения x удовлетворяют неравенству $a \leqslant x \leqslant b$; $(a, b]$, если $a < x \leqslant b$; $[a, b)$, если $a \leqslant x < b$; (a, b), если $a < x < b$. Используя знак принадлежности $\in$, будем писать: $x \in [a, b]$, если x—точка из $[a, b]$ и т. д.

Далее, символом C^2 обозначим класс (множество) функций, имеющих непрерывные вторые производные, а через C—класс непрерывных функций. Если φ—функция класса C^2, будем писать $\varphi \in C^2$ и т. п.

§ 2. Задача Штурма—Лиувилля

Рассмотрим обыкновенное линейное дифференциальное уравнение:

$$p_0 y'' + p_1 y' + (l + p_2) y = 0, \tag{1}$$

где p_0, p_1, p_2—вещественные функции вещественной переменной $x \in [a, b]$, а l—*комплексный* параметр. Если при некотором x хотя бы один из коэффициентов p_0, p_1, p_2 имеет бесконечный разрыв или $p_0=0$, то говорят, что *коэффициенты уравнения* имеют *особенность в* точке x. Примем, что при $a<x<b$ коэффициенты уравнения (1) особенностей не имеют, в конечных же точках $x=a$ и $x=b$ особенности могут быть (такие случаи как раз важны). Не ограничивая общности, можно принять, что $p_0>0$ в (a, b).

Дифференциальные формы

$$\tilde{L}y=p_0y''+p_1y'+p_2y,\ \tilde{L}^{+}y=(p_0y)''-(p_1y)'+p_2y \tag{2}$$

называют *сопряженными*. Символы $\tilde{L}$ и $\tilde{L}^{+}$ означают здесь *правила* или, что то же, *операторы*, сопоставляющие функции y соответствующие дифференциальные выражения. Если $p_1=p_0'$, то $\tilde{L}y=\tilde{L}^{+}y$ и форму $\tilde{L}u$ называют *самосопряженной*.

Умножением на $\frac{1}{p_0}e^{\int\frac{p_1}{p_0}dx}$ уравнение (1) можно привести к виду

$$Lu=-(pu')'+qu=l\rho u, \tag{3}$$

где

$$p=e^{\int\frac{p_1}{p_0}dx},\quad \rho=\frac{p}{p_0},\quad q=-\frac{p_2}{p_0}, \tag{4}$$

а левая часть Lu уравнения — самосопряженная форма. Из $p_0>0$ следует, что $p>0$, $\rho>0$.

Самосопряженные дифференциальные формы Lu и Lv двух функций $u\in C^2$ и $v\in C^2$ удовлетворяют *тождеству Лагранжа:*

$$vLu-uLv=[pW(u,\ v)]',\quad u,v\in C^2, \tag{5}$$

где $W(u,\ v)=uv'-u'v$ — *определитель Вронского* функций u и v. Взяв интеграл от обеих частей (5), получим *формулу Грина:*

$$\int_{x_1}^{x_2}(vLu-uLv)\,dx=[pW(u,v)]\Big|_{x_1}^{x_2}. \tag{6}$$

Нас будут интересовать решения уравнения (3), удовлетворяющие *однородным линейным граничным условиям с вещественными коэффициентами*. Граничную задачу с такими условиями называют *задачей Штурма—Лиувилля*. Будем записывать ее в виде системы соотношений:

$$Lu=-(pu')'+qu=l\rho u,\quad x\in(a,\ b), \tag{7}$$

$$u(a)\cos\alpha-p(a)\,u'(a)\sin\alpha=0,$$

$$u(b)\cos\beta-p(b)\,u'(b)\sin\beta=0, \tag{8}$$

где вещественные числа α и β удовлетворяют неравенствам:

$$0 \leqslant \alpha < \pi, \quad 0 < \beta \leqslant \pi. \tag{9}$$

Если не оговорено противное, будем считать, что

$$|a|, \ |b| < \infty; \ p > 0, \ \rho > 0 \ \text{и} \ p, \ p', \ q, \ \rho \in C \\ \text{при } a \leqslant x \leqslant b. \tag{10}$$

Задача (7)—(8) всегда имеет не представляющее интереса решение $u \equiv 0$, называемое *тривиальным*. Нетривиальных решений при данном произвольном l, однако, может и не быть. Поэтому содержанием задачи (7)—(8) является не только отыскание решений при данном l, но и определение совокупности значений l, при которых существуют нетривиальные решения. Если при некотором $l = \lambda$ задача (7)—(8) имеет нетривиальное решение $u = u(x, \lambda)$, то λ называют *собственным числом* (или *значением*) этой задачи, а решение $u(x, \lambda)$ — *собственной функцией задачи, принадлежащей собственному числу* λ.

Частные случаи задачи Штурма—Лиувилля неоднократно встречались раньше (например, гл. XXX). Из этого видно, что она имеет нетривиальные решения.

Легко устанавливаются следующие свойства собственных функций задачи Штурма—Лиувилля.

Две собственные функции, принадлежащие одному и тому же собственному числу, линейно зависимы, т. е. отличаются лишь постоянным множителем.

В самом деле, так как все собственные функции удовлетворяют одному и тому же граничному условию (8), то, как показывает простое вычисление, определитель Вронского $W(u_1, u_2) = u_1 u_2' - u_1' u_2$ любых двух собственных функций u_1, u_2 обращается в нуль в граничных точках. Если функции u_1 и u_2 принадлежат одному и тому же собственному числу, то они, тем самым, удовлетворяют одному и тому же дифференциальному уравнению, а тогда из обращения их определителя Вронского в нуль при каком-либо одном значении независимой переменной, как известно, следует, что они линейно зависимы.

Две собственные функции u_1, u_2, принадлежащие различным собственным числам λ_1 и $\lambda_2 \neq \lambda_1$, на интервале $[a, b]$ взаимно ортогональны с весом ρ, т. е.

$$\int_a^b u_1 u_2 \rho \, dx = 0. \tag{11}$$

Для доказательства применим формулу Грина (6), положив в ней $x_1 = a$, $x_2 = b$, $v = u_2$, $u = u_1$, что ввиду (7) дает

$$(\lambda_1 - \lambda_2) \int_a^b u_1 u_2 \rho \, dx = [pW(u_1, u_2)] \Big|_a^b. \tag{12}$$

Определитель Вронского двух собственных функций, как было указано, в граничных точках равен нулю. Поэтому правая часть (12) равна нулю. Поскольку $\lambda_1 \neq \lambda_2$, то из этого следует (11).

Собственные числа вещественны.

В самом деле, ввиду вещественности коэффициентов уравнения (7) $L = \overset{*}{L}$, $\rho = \overset{*}{\rho}$, где звездочка означает переход к комплексно сопряженной величине. Поэтому из $Lu = \lambda\rho u$ вытекает, что $L\overset{*}{u} = \overset{*}{\lambda}\rho\overset{*}{u}$, т. е. если u — собственная функция, принадлежащая собственному числу λ, то $\overset{*}{u}$ — собственная функция, принадлежащая собственному числу $\overset{*}{\lambda}$. Если значение λ невещественно, то $\lambda \neq \overset{*}{\lambda}$ и, по доказанному, функции u и $\overset{*}{u}$ ортогональны, т. е.

$$\int_a^b u\overset{*}{u}\,\rho\,dx = \int_a^b |u|^2\,\rho\,dx = 0.$$

Но так как $\rho > 0$, то $u \equiv 0$, т. е. u — тривиальное решение, а не собственная функция. Поэтому невещественных собственных чисел быть не может.

Собственные функции, принадлежащие различным собственным значениям, линейно независимы.

В самом деле, предположим, что собственные функции u_1, $u_2, \ldots, u_n$, принадлежащие различным собственным значениям, связаны линейным соотношением $c_1u_1 + c_1u_2 + \ldots + c_nu_n = 0$. Умножив его на ρu_1 и проинтегрировав в пределах от a до b, ввиду (11), получим

$$c_1 \int_a^b u_1^2\rho\,dx = 0,$$

т. е. $c_1 = 0$, так как $u_1 \not\equiv 0$. Подобным путем найдем, что и все коэффициенты $c_2, c_3, \ldots, c_n$ должны быть равны нулю, т. е. линейной зависимости между $u_1, u_2, \ldots, u_n$ быть не может.

Две линейно независимые собственные функции на интервале $[a, b]$ взаимно ортогональны с весом ρ.

Это утверждение является очевидным следствием предыдущих.

§ 3. Функция Грина

Примем для простоты, что производная ρ непрерывна на $[a, b]$. Тогда с помощью подстановки $v = \sqrt{\rho}u$ задача (7)—(8) преобразуется к виду

$$Lv = -(pv')' + qv = lv, \quad x \in (a, b), \tag{13}$$

$$v(a)\cos\alpha - p(a)v'(a)\sin\alpha = 0, \;\; v(b)\cos\beta - p(b)v'(b)\sin\beta = 0, \tag{14}$$

где p, q, α, β отличны от p, q, α, β в (7)—(8), но удовлетворяют (9) и (10).