Определитель Вронского двух собственных функций, как было указано, в граничных точках равен нулю. Поэтому правая часть (12) равна нулю. Поскольку $\lambda_1 \neq \lambda_2$, то из этого следует (11).

Собственные числа вещественны.

В самом деле, ввиду вещественности коэффициентов уравнения (7) $L = \overset{*}{L}$, $\rho = \overset{*}{\rho}$, где звездочка означает переход к комплексно сопряженной величине. Поэтому из $Lu = \lambda \rho u$ вытекает, что $L\overset{*}{u} = \overset{*}{\lambda}\rho\overset{*}{u}$, т. е. если u — собственная функция, принадлежащая собственному числу λ, то $\overset{*}{u}$ — собственная функция, принадлежащая собственному числу $\overset{*}{\lambda}$. Если значение λ невещественно, то $\lambda \neq \overset{*}{\lambda}$ и, по доказанному, функции u и $\overset{*}{u}$ ортогональны, т. е.

$$\int_a^b u\overset{*}{u}\,\rho\,dx = \int_a^b |u|^2 \rho\,dx = 0.$$

Но так как $\rho > 0$, то $u \equiv 0$, т. е. u — тривиальное решение, а не собственная функция. Поэтому невещественных собственных чисел быть не может.

Собственные функции, принадлежащие различным собственным значениям, линейно независимы.

В самом деле, предположим, что собственные функции u_1, u_2, ..., u_n, принадлежащие различным собственным значениям, связаны линейным соотношением $c_1u_1 + c_1u_2 + \ldots + c_nu_n = 0$. Умножив его на ρu_1 и проинтегрировав в пределах от a до b, ввиду (11), получим

$$c_1 \int_a^b u_1^2 \rho\,dx = 0,$$

т. е. $c_1 = 0$, так как $u_1 \not\equiv 0$. Подобным путем найдем, что и все коэффициенты c_2, c_3, ..., c_n должны быть равны нулю, т. е. линейной зависимости между u_1, u_2, ..., u_n быть не может.

Две линейно независимые собственные функции на интервале $[a, b]$ *взаимно ортогональны с весом* ρ.

Это утверждение является очевидным следствием предыдущих.

§ 3. Функция Грина

Примем для простоты, что производная ρ непрерывна на $[a, b]$. Тогда с помощью подстановки $v = \sqrt{\rho}\,u$ задача (7)—(8) преобразуется к виду

$$Lv = -(pv')' + qv = lv, \quad x \in (a, b), \tag{13}$$

$$v(a)\cos\alpha - p(a)\,v'(a)\sin\alpha = 0, \quad v(b)\cos\beta - p(b)\,v'(b)\sin\beta = 0, \tag{14}$$

где p, q, α, β отличны от p, q, α, β в (7)—(8), но удовлетворяют (9) и (10).

Пусть $u_1(x, l)$, $u_2(x, l)$ — решения уравнения (13), удовлетворяющие начальным условиям:

$$u_1(a, l) = \sin\alpha, \quad p(a)\,u_1'(a, l) = \cos\alpha; \qquad (15)$$
$$u_2(b, l) = \sin\beta, \quad p(b)\,u_2'(b, l) = \cos\beta,$$

и $W(u_1, u_2) = u_1u_2' - u_1'u_2$ — их определитель Вронского. В силу (13) и (15) $[pW(u_1, u_2)]' = 0$, поэтому

$$W(u_1, u_2) = \frac{1}{p} W(l), \qquad (16)$$

где функция $W(l)$ не зависит от x и обращается в нуль тогда и только тогда, когда функции u_1 и u_2 линейно зависимы, т. е. когда $u_2 = cu_1$, где c — постоянная. Согласно (15), функция u_1 удовлетворяет первому из граничных условий (14), а u_2 — второму. Поэтому, если при некотором $l = \lambda$ они линейно зависимы, то каждая из них удовлетворяет обоим условиям (14) и, тем самым, есть собственная функция задачи (13)—(14), а $l = \lambda$ есть собственное число. Следовательно, функция $W(l)$ обращается в нуль тогда и только тогда, когда l — собственное число. Введем функцию

$$G(x, \xi; l) = \frac{1}{W(l)} \begin{cases} u_1(x, l)\,u_2(\xi, l), & \text{когда} \quad x \leqslant \xi, \\ u_1(\xi, l)\,u_2(x, l), & \text{когда} \quad x > \xi. \end{cases}$$

Она определена, если l — не собственное число, непрерывна по аргументам x и ξ, удовлетворяет граничным условиям (14), а при $x \neq \xi$ — уравнению (13). При $x = \xi$ ее первая производная испытывает разрыв, в силу (16), равный

$$G'(x+0, \xi; l) - G'(x-0, \xi; l) = \frac{1}{W(l)}[u_1(\xi, l)\,u_2'(x, l) - \\ - u_1'(x, l)\,u_2(\xi, l)] = \frac{1}{p(x)}.$$

Если l — не собственное число и $f \in C$, то прямой подстановкой легко проверить, что функция

$$\tilde{v}(x, l) = \int_a^b G(x, \xi; l)\,f(\xi)\,d\xi \qquad (17)$$

есть решение неоднородной граничной задачи для уравнения $L\tilde{v} = l\tilde{v} + f$ при граничных условиях (14). Функцию $G(x, \xi; l)$ называют *функцией Грина* этой неоднородной задачи.

§ 4. Экстремальные свойства собственных функций

Примем, что $l = 0$ — не собственное число задачи (13)—(14). Это не ограничивает общности, поскольку, добавив к q произвольное вещественное число l_0, все собственные числа можно изменить