Пусть $u_1(x, l)$, $u_2(x, l)$ — решения уравнения (13), удовлетворяющие начальным условиям:

$$u_1(a, l) = \sin\alpha, \quad p(a)\, u_1'(a, l) = \cos\alpha; \qquad (15)$$
$$u_2(b, l) = \sin\beta, \quad p(b)\, u_2'(b, l) = \cos\beta,$$

и $W(u_1, u_2) = u_1 u_2' - u_1' u_2$ — их определитель Вронского. В силу (13) и (15) $[pW(u_1, u_2)]' = 0$, поэтому

$$W(u_1, u_2) = \frac{1}{p} W(l), \qquad (16)$$

где функция $W(l)$ не зависит от x и обращается в нуль тогда и только тогда, когда функции u_1 и u_2 линейно зависимы, т. е. когда $u_2 = cu_1$, где c — постоянная. Согласно (15), функция u_1 удовлетворяет первому из граничных условий (14), а u_2 — второму. Поэтому, если при некотором $l = \lambda$ они линейно зависимы, то каждая из них удовлетворяет обоим условиям (14) и, тем самым, есть собственная функция задачи (13)—(14), а $l = \lambda$ есть собственное число. Следовательно, функция $W(l)$ обращается в нуль тогда и только тогда, когда l — собственное число. Введем функцию

$$G(x, \xi; l) = \frac{1}{W(l)} \begin{cases} u_1(x, l)\, u_2(\xi, l), & \text{когда} \quad x \leqslant \xi, \\ u_1(\xi, l)\, u_2(x, l), & \text{когда} \quad x > \xi. \end{cases}$$

Она определена, если l — не собственное число, непрерывна по аргументам x и ξ, удовлетворяет граничным условиям (14), а при $x \neq \xi$ — уравнению (13). При $x = \xi$ ее первая производная испытывает разрыв, в силу (16), равный

$$G'(x+0, \xi; l) - G'(x-0, \xi; l) = \frac{1}{W(l)} [u_1(\xi, l)\, u_2'(x, l) - $$
$$- u_1'(x, l)\, u_2(\xi, l)] = \frac{1}{p(x)}.$$

Если l — не собственное число и $f \in C$, то прямой подстановкой легко проверить, что функция

$$\tilde{v}(x, l) = \int_a^b G(x, \xi; l)\, f(\xi)\, d\xi \qquad (17)$$

есть решение неоднородной граничной задачи для уравнения $L\tilde{v} = l\tilde{v} + f$ при граничных условиях (14). Функцию $G(x, \xi; l)$ называют *функцией Грина* этой неоднородной задачи.

§ 4. Экстремальные свойства собственных функций

Примем, что $l = 0$ — не собственное число задачи (13)—(14). Это не ограничивает общности, поскольку, добавив к q произвольное вещественное число l_0, все собственные числа можно изменить на l_0. Пусть $G(x, \xi) = G(x, \xi, 0)$, тогда

$$v(x) = \int_a^b G(x, \xi) f(\xi) \, d\xi \tag{18}$$

— решение неоднородной граничной задачи

$$Lv = -(pv')' + qv = f, \quad x \in (a, b), \tag{19}$$

$$\begin{aligned} v(a)\cos\alpha - p(a)\, v'(a) \sin\alpha = 0, \\ v(b)\cos\beta - p(b)\, v'(b) \sin\beta = 0. \end{aligned} \tag{20}$$

Обозначим символом L^{-1} *правило* или, что то же самое, *оператор*, которым функции $f(x)$ в (18) сопоставляется функция $v(x)$. Иными словами, положим $L^{-1} f = v$. Тогда, ввиду (19) и (18),

$$Lv = f, \quad L^{-1} f = v \tag{21}$$

и

$$L^{-1}Lv = v, \ LL^{-1} f = f. \tag{22}$$

Это оправдывает введение обозначения L^{-1}, ибо, в смысле (21)—(22), операторы L и L^{-1} взаимно обратны (символически: $LL^{-1} = L^{-1}L = 1$). Подчеркнем, что функция v в (21)—(22) удовлетворяет граничным условиям (14)!

Применив операцию L^{-1} к (13), получим $lL^{-1}v = v$ или

$$v(x) = l \int_a^b G(x, \xi) \, v(\xi) \, d\xi. \tag{*}$$

Если считать функцию $G(x, \xi)$ заданной, то (*) есть *интегральное уравнение* (однородное уравнение Фредгольма второго рода) относительно неизвестной функции $v(x)$, функцию $G(x, \xi)$ называют его *ядром*. Это уравнение эквивалентно задаче Штурма—Лиувилля (13)—(14). Его нетривиальные решения существуют при значениях l, равных собственным числам задачи (13)—(14), и суть собственные функции этой задачи. Уравнение (*) включает и граничные условия (14)—они учтены в свойствах функции Грина. Никаких дополнительных условий типа граничных задавать не нужно. Функция Грина $G(x, \xi)$ — ядро интегрального уравнения (*)—служит связующим звеном между уравнением (*) и задачей (13)—(14).

Введем обозначение

$$(g_1, g_2) = \int_a^b \overset{*}{g}_1 g_2 \, dx, \tag{23}$$

где звездочка означает переход к комплексно-сопряженной величине, а $g_1 = g_1(x)$ и $g_2 = g_2(x)$—функции с квадратом модуля, интегрируемым на $[a, b]$, или, как будем говорить,— *функции класса* $\mathscr{L}^2(a, b)$. Если функция $g(x)$ принадлежит классу $\mathscr{L}^2(a, b)$, то, используя знак принадлежности $\in$, будем писать: $g \in \mathscr{L}^2(a, b)$. Выражение вида (23) называют *скалярным произведением* функций g_1 и g_2 на интервале $[a, b]$. Скалярное произведение существует для любых $g_1, g_2 \in \mathscr{L}^2(a, b)$.

Укажем для справок свойства скалярного произведения ($g, g_1, g_2 \in \mathscr{L}^2(a, b)$): (g, g) — вещественное неотрицательное число.

Если $g \in C$, то из $(g, g) = 0$ следует, что $g \equiv 0$ на $[a, b]$ (если g — кусочно непрерывна, то из $(g, g) = 0$ следует, что $g = 0$ почти всюду на $[a, b]$).

$$(g_2, g_1) = (g_1, g_2)^*.$$

Если c_1, c_2 — числа, то $(c_1 g_1, c_2 g_2) = \overset{*}{c}_1 c_2 (g_1, g_2)$.

$$(g_1 + g_2, g) = (g_1, g) + (g_2, g).$$

$$(1, g) = \int_a^b g\,dx, \qquad (1, 1) = b - a.$$

$|(g_1, g_2)| \leqslant (g_1, g_1)^{\frac{1}{2}} (g_2, g_2)^{\frac{1}{2}}$ *(неравенство Коши-Буняковского).*

$(g_1 + g_2, g_1 + g_2)^{\frac{1}{2}} \leqslant (g_1, g_1)^{\frac{1}{2}} + (g_2, g_2)^{\frac{1}{2}}$ *(неравенство Минковского).*

Если функции u_1 и u_2 имеют непрерывные вторые производные и обе удовлетворяют граничным условиям (14), то

$$(Lu_1, u_2) = (u_1, Lu_2), \tag{24}$$

т. е., как говорят, оператор L *самосопряженный*. Это легко установить, записав (24) в явном виде и интегрируя по частям. Положив $u_1 = L^{-1} f_1$, $u_2 = L^{-1} f_2$, ввиду (22), получим двойственную к (24) формулу

$$(L^{-1} f_1, f_2) = (f_1, L^{-1} f_2), \tag{25}$$

т. е. оператор L^{-1} также *самосопряженный*. Важное свойство самосопряженных операторов: для них скалярные произведения вида (Af, f) вещественны. Действительно, ввиду (23), $(Af, f)^* = (f, Af)$, так что, если оператор A самосопряженный, то $(Af, f)^* = (Af, f)$. Записав (25) в явном виде, легко установить, что

$$G(x, \xi) = \overset{*}{G}(\xi, x). \tag{26}$$

Если $(g, g) = 1$, говорят, что на $[a, b]$ функция g *нормирована* (на единицу). Для дальнейшего удобно считать, что функция f в (18) нормирована. Обозначив символом C_N множество непрерывных нормированных на $[a, b]$ функций, запишем это условие в виде: $f = \tilde{f} \in C_N$.

Условие нормировки $(\tilde{f}, \tilde{f}) = 1$ и свойства оператора L накладывают определенные ограничения на рост функций $u = L^{-1}\tilde{f}$. Пусть граничные условия (14) и оператор L фиксированы. Тогда:

а) существует число $B > 0$ такое, что для любой функции $f \in C_N$

$$|L^{-1}\tilde{f}| = |u| \leqslant B,$$

т. е. функции u *равномерно ограничены*;

б) для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta(\varepsilon) > 0$, что для любой функции $\tilde{f} \in C_N$ и любой точки x_0 из $[a, b]$

$$|u(x) - u(x_0)| < \varepsilon, \quad \text{если} \quad (x - x_0) < \delta(\varepsilon),$$

т. е., как говорят, функции *и равностепенно непрерывны.*

Для равномерно ограниченных и равностепенно непрерывных функций справедлива лемма: если $\{u\}$ — любое бесконечное множество таких функций, то из него всегда можно выделить последовательность $u_1, u_2, \ldots, u_j, \ldots$ функций u, равномерно сходящуюся на $[a, b]$;

в) точные *верхние грани* значений, которые принимают выражения $|(u, \tilde{f})|$ и $|(u, u)|^{\frac{1}{2}}$ при выборе $\tilde{f}$ из C_N, ограничены и совпадают:

$$\sup (u, u)^{\frac{1}{2}} = \sup |(u, \tilde{f})| = \mu_0 < \infty, \tag{*}$$

где sup означает «точная верхняя грань», а μ_0 — общее значение верхних граней.

Из (*) следует, что $\mu \neq 0$. Действительно, если $\mu_0 = 0$, то по определению точной верхней грани $(u, u) \leqslant 0$, что возможно только тогда, когда непрерывная функция $u \equiv 0$. Но это невозможно, так как $Lu = \tilde{f}$, а $(\tilde{f}, \tilde{f}) = 1$.

Задача Штурма — Лиувилля связана с экстремальной задачей следующего типа: найти нормированную непрерывную функцию v, такую, что при $\tilde{f} = v$ выражение

$$|(L^{-1}\tilde{f}, \tilde{f})| = \left|\int_a^b G(x, \xi)\, \tilde{f}(x)\, \tilde{f}(\xi)\, dx\, d\xi\right|, \quad \tilde{f} \in C_N \tag{27}$$

достигает своей точной верхней грани.

Связь задачи (13)—(14) с этой экстремальной задачей можно предполагать, например, на основании следующего нестрогого рассуждения. Выражение $|L^{-1}\tilde{f}, \tilde{f})|$ ограничено сверху, так как функции $\tilde{f}$ нормированы. Его точная верхняя грань достигается для функции $\tilde{f} = v$, для которой скалярное произведение $(L^{-1}\tilde{f}, \tilde{f})$ имеет экстремум в силу условия $(\tilde{f}, \tilde{f}) = 1$. Если $\tilde{f}$ варьировать (т. е. функцию $\tilde{f}(x)$ заменять близкими ей функциями $\tilde{f}(x) + \delta\tilde{f}(x)$, то вариация (главная часть приращения) интеграла $(L^{-1}\tilde{f}, \tilde{f})$

$$\delta(L^{-1}\tilde{f}, \tilde{f}) = (\delta\tilde{f}, L^{-1}\tilde{f}) + (L^{-1}\tilde{f}, \delta\tilde{f}). \tag{*}$$

Здесь учтено, что, ввиду (25), $(L^{-1}\delta\tilde{f}, \tilde{f}) = (\delta\tilde{f}, L^{-1}\tilde{f})$. В экстремуме, т. е. при $\tilde{f} = v$, эта вариация должна обращаться в нуль в силу условия $(\tilde{f}, \tilde{f}) = 1$ или, что то же, условия

$$(\delta\tilde{f}, \tilde{f}) + (\tilde{f}, \delta\tilde{f}) = 0. \tag{**}$$

Сравнивая (**) с (*), видим, что это имеет место, если

$$L^{-1}v = \mu v, \tag{***}$$

где μ — отличное от нуля вещественное число.

Из (***) следует, что v удовлетворяет граничным условиям (14) (свойство оператора L^{-1}). Применив к (***) оператор L, ввиду (22), получим: $Lv=\lambda v$, где $\lambda=\frac{1}{\mu}$, т. е. v удовлетворяет также и уравнению (13) и, значит, должна быть собственной функцией, а λ — собственным числом задачи (13)—(14). Подставив (***) в (27), получим $|(L^{-1}v, v)|=\frac{1}{|\lambda|}$, т. е. точная верхняя грань выражения (27) совпадает с величиной, обратной абсолютному значению собственного числа λ задачи (13)—(14). Из справедливости изложенных соображений и существования верхней грани у выражения (27) должно следовать существование нетривиального решения задачи (13)—(14).

Изложенные соображения действительно оправдываются.

Оказывается, что точная верхняя грань выражения (27) $\mu_0>0$, число $\lambda_0=\frac{1}{\mu_0}$ $\left(\text{или } -\frac{1}{\mu_0}\right)$ — собственное число задачи (13)—(14), и если v_0 — нормированная собственная функция этой задачи, принадлежащая λ_0, то при $\tilde{f}=v_0$ выражение (27) достигает своей точной верхней грани μ_0.

Пусть далее

$$G_1(x, \xi)=G(x, \xi)-\frac{1}{\lambda_0}v_0(x)\overset{*}{v}_0(\xi) \tag{28}$$

и

$$\begin{aligned} L_1^{-1}f=\int_a^b G_1(x, \xi)f(\xi)\,d\xi=L^{-1}f-\frac{(v_0, f)}{\lambda_0}v_0= \\ =L^{-1}[f-v_0(v_0, f)], \quad f\in C. \end{aligned} \tag{29}$$

Функции v_0 и $L_1^{-1}f$ ортогональны. Действительно, ввиду $v_0=\lambda_0L^{-1}v_0$, (25) и (29),

$$(v_0, L_1^{-1}f)=(v_0, L^{-1}f)-(v_0, f)(v_0, L^{-1}v_0)=\frac{1}{\lambda_0}(v_0, f)-\frac{1}{\lambda_0}(v_0, f)\equiv 0. \tag{30}$$

Кроме того,

$$L_1^{-1}f=L^{-1}f, \text{ если } (v_0, f)=0. \tag{31}$$

Если в (27) заменить $G(x, \xi)$ на $G_1(x, \xi)$, то снова оказывается, что точная верхняя грань полученного выражения $\mu_1>0$, число $\lambda_1=\frac{1}{\mu_1}\left(\text{или}-\frac{1}{\mu_1}\right)$ — собственное число задачи (13)—(14), а принадлежащая ему нормированная собственная функция придает этому выражению экстремальное значение. Ввиду (31), замена G на G_1 эквивалентна экстремальной задаче для (27) при дополнительном условии $(v_0, f)=0$. Поскольку дополнительное условие может только уменьшить верхнюю грань, то $|\lambda_1|\geqslant|\lambda_0|$.

Этот процесс можно продолжать шаг за шагом, причем он не может прерваться. Действительно, для этого, скажем на j-м шаге, должно было бы быть $G_j(x, \xi)=0$, где, аналогично (28)—(29),

$$G_j(x, \xi)=G_{j-1}(x, \xi)-\frac{1}{\lambda_{j-1}} v_{j-1}(x)\overset{*}{v}_{j-1}(\xi) \text{ и}$$

$$L_j^{-1}f=L^{-1}\left[f-\sum_{\alpha=0}^{j-1}(v_\alpha, f)\, v_\alpha\right], \quad f \in C. \tag{32}$$

Применение к правой части оператора L, ввиду $L_j^{-1}f=0$, дало бы

$$f=\sum_{\alpha=0}^{j-1}(v_\alpha, f)\, v_\alpha,$$

т. е. любая непрерывная функция могла бы быть представлена как линейная комбинация конечного числа дважды дифференцируемых функций v_α, что невозможно.

Из этого следует существование бесконечной счетной последовательности $v_1, v_2, \ldots$ собственных функций задачи (13)—(14), принадлежащих соответственно собственным числам $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$, удовлетворяющим неравенствам $|\lambda_0| \leqslant |\lambda_1| \leqslant \ldots$.

§ 5. Разложение по собственным функциям задачи Штурма—Лиувилля на конечном интервале

Соотношение (32) может послужить исходным пунктом для вывода теоремы разложения. Предварительно докажем *неравенство Бесселя*:

$$\sum_{\alpha=0}^{\infty}|(v_\alpha, g)|^2 \leqslant (g, g), \quad g \in \mathscr{L}^2(a, b), \tag{33}$$

где v_α — нормированные собственные функции задачи Штурма—Лиувилля. Ввиду попарной ортогональности собственных функций для любого числа $N>0$

$$\left(g-\sum_{\alpha=0}^{N}(v_\alpha, g)\, v_\alpha,\ g-\sum_{\beta=0}^{N}(v_\beta, g)\, v_\beta\right)=(g, g)-\sum_{\alpha=0}^{N}|(v_\alpha, g)|^2 \geqslant 0.$$

Вследствие произвольности N отсюда следует (30).

Из неравенства Бесселя вытекает, что *ряд* $\sum\limits_{\alpha=0}^{\infty}\frac{1}{\lambda_\alpha^2}$, *где* λ_α — *собственные числа задачи Штурма—Лиувилля, сходится.* В самом деле, пусть ξ фиксировано и $g(x)=G(x, \xi)$. Заметив, что

$$\frac{1}{\lambda_j} v_j=L^{-1}v_j=\int_a^b G(x, \xi)\, v_j(\xi)\, d\xi,$$