шаге, должно было бы быть $G_j(x, \xi) = 0$, где, аналогично (28) — (29), $G_j(x, \xi) = G_{j-1}(x, \xi) - \frac{1}{\lambda_{j-1}} v_{j-1}(x) \overset{*}{v}_{j-1}(\xi)$ и

$$L_j^{-1} f = L^{-1}\left[f - \sum_{\alpha=0}^{j-1} (v_\alpha, f) v_\alpha\right], \quad f \in C. \tag{32}$$

Применение к правой части оператора L, ввиду $L_j^{-1} f = 0$, дало бы

$$f = \sum_{\alpha=0}^{j-1} (v_\alpha, f) v_\alpha,$$

т. е. любая непрерывная функция могла бы быть представлена как линейная комбинация конечного числа дважды дифференцируемых функций v_α, что невозможно.

Из этого следует существование бесконечной счетной последовательности $v_1, v_2, \ldots$ собственных функций задачи (13) — (14), принадлежащих соответственно собственным числам $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$, удовлетворяющим неравенствам $|\lambda_0| \leqslant |\lambda_1| \leqslant \ldots$.

§ 5. Разложение по собственным функциям задачи Штурма — Лиувилля на конечном интервале

Соотношение (32) может послужить исходным пунктом для вывода теоремы разложения. Предварительно докажем *неравенство Бесселя*:

$$\sum_{\alpha=0}^{\infty} |(v_\alpha, g)|^2 \leqslant (g, g), \quad g \in \mathscr{L}^2(a, b), \tag{33}$$

где v_α — нормированные собственные функции задачи Штурма — Лиувилля. Ввиду попарной ортогональности собственных функций для любого числа $N > 0$

$$\left(g - \sum_{\alpha=0}^{N} (v_\alpha, g) v_\alpha, \; g - \sum_{\beta=0}^{N} (v_\beta, g) v_\beta\right) = (g, g) - \sum_{\alpha=0}^{N} |(v_\alpha, g)|^2 \geqslant 0.$$

Вследствие произвольности N отсюда следует (30).

Из неравенства Бесселя вытекает, что *ряд* $\sum_{\alpha=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_\alpha^2}$, *где* λ_α — *собственные числа задачи Штурма — Лиувилля, сходится.* В самом деле, пусть ξ фиксировано и $g(x) = G(x, \xi)$. Заметив, что

$$\frac{1}{\lambda_j} v_j = L^{-1} v_j = \int_a^b G(x, \xi) v_j(\xi) d\xi,$$

ввиду (26), получим

$$|(v_j,\ g)| = \left|\int_a^b \overset{*}{v}_j(\zeta) G(\zeta,\ \xi)\, d\zeta\right| = \left|\int_a^b G(\xi,\ \zeta)\, v_j(\zeta)\, d\xi\right| = \left|\frac{1}{\lambda_j} v_j(\xi)\right|.$$

В силу (33), для любого N

$$\int_a^b \sum_{\alpha=0}^{N} |(v_\alpha,\ g)|^2\, d\xi = \sum_{\alpha=0}^{N} \frac{1}{\lambda_\alpha^2} \int_a^b |v_j(\xi)|^2\, d\xi = \sum_{\alpha=0}^{N} \frac{1}{\lambda_\alpha^2} \leqslant \int_a^b (g,\ g)\, d\xi =$$

$$= \int_a^b \int_a^b |G(x,\ \xi)|^2\, dx\, d\xi < \infty.$$

Ввиду произвольности N отсюда вытекает требуемый результат.

Заметим, из сходимости рассматриваемого ряда следует, что *собственные числа λ_j с ростом j неограниченно возрастают.*

Вернемся к соотношению (32). *Если $j \to \infty$, то $L_j^{-1} f \to 0$.* Доказательство основано на предложениях, которые только укажем: а) множество функций $L^{-1}\tilde{f}$ равномерно ограничено, т. е. для любых $\tilde{f}$ из C_N $|L^{-1}\tilde{f}| \leqslant B$, где B — число; б) точные верхние грани выражений $(L^{-1}\tilde{f},\ L^{-1}\tilde{f})^{\frac{1}{2}}$ и $|(L^{-1}\tilde{f},\ \tilde{f})|$ при выборе $\tilde{f}$ из C_N совпадают.

Ввиду а) ряд в правой части (32) при $j \to \infty$ сходится равномерно. В самом деле, если f — непрерывная функция, то $f(f,\ f)^{-\frac{1}{2}}$ — нормированная непрерывная функция и, в силу а), $|L^{-1} f| \leqslant B(f,\ f)^{\frac{1}{2}}$. Положим $g = \sum_{\alpha=N}^{N_1} (v_\alpha,\ f)\, v_\alpha$, где N и $N_1 > N$ — произвольные числа. Тогда

$$|L^{-1} g| \leqslant B\left(\sum_{\alpha=N}^{N_1} (v_\alpha,\ f)\, v_\alpha, \sum_{\beta=N}^{N_1} (v_\beta,\ f)\, v_\beta\right) = B \sum_{\alpha=N}^{N_1} |(v_\alpha,\ f)|^2.$$

При $N \to \infty$ сумма в правой части стремится к нулю в силу неравенства Бесселя (33), а так как она не зависит от x, то сумма $L^{-1} g \to 0$ равномерно. Отсюда следует равномерная сходимость ряда в правой части (32) и, значит, при $j \to \infty$ последовательность $L_j^{-1} f$ сходится к непрерывной функции. Так как точная верхняя граница $|(L_j^{-1}\tilde{f},\ \tilde{f})|$ равна $\frac{1}{|\lambda_j|}$, то, ввиду б), $(L_j^{-1} f, L_j^{-1} f) \leqslant \frac{(f,\ f)}{\lambda_j^2}$. Следовательно, $(L_j^{-1} f,\ L_j^{-1} f) \to 0$ при $j \to \infty$, а так как предел $L_j^{-1} f$ непрерывен, то $L_j^{-1} f \to 0$. Перейдя в (32) к пределу $j = \infty$ и положив $f = Lg$, где g — функция, имеющая непрерывные вторые производные и удовлетворяющая граничным условиям (14), ввиду (22), (25) и (13), получим

$$g=\sum_{\alpha=0}^{\infty}(v_\alpha,\ g)\,v_\alpha, \tag{34}$$

причем ряд в правой части сходится равномерно.

Итак, *функция g, имеющая непрерывные вторые производные и удовлетворяющая граничным условиям задачи Штурма — Лиувилля, разлагается на интервале $[a,\ b]$ в равномерно сходящийся ряд* (34) *по собственным функциям v_α этой задачи*. Ряд (34) называют *рядом Фурье*, а скалярные произведения $(v_\alpha,\ g)$ — *коэффициентами Фурье функции g*.

Отметим, что ряд (34) содержит только собственные функции v_j, являющиеся решениями экстремальной задачи § 4. Поэтому решения этой задачи исчерпывают все линейно независимые собственные функции задачи Штурма — Лиувилля. Действительно, пусть v — линейно независимая собственная функция, не принадлежащая множеству собственных функций, используемых в (34), и, следовательно (§ 2), ортогональная им. Как собственная функция, она удовлетворяет (14) и имеет непрерывные вторые производные, поэтому может быть разложена в ряд (34). Однако, ввиду ее ортогональности всем функциям, по которым производится разложение, все ее коэффициенты Фурье равны нулю и, следовательно, она тождественно равна нулю.

Сформулированная выше теорема разложения может быть обобщена:

Пусть функция g имеет *интегрируемый квадрат модуля* на $[a,\ b]$. Тогда *ряд Фурье* $\sum\limits_{\alpha=0}^{\infty}(v_\alpha,\ g)\,v_\alpha$ *функции g сходится к ней в среднем*, т. е.

$$\lim_{N\to\infty}\int_a^b\left|g-\sum_{\alpha=0}^{N}(v_\alpha,\ g)\,v_\alpha\right|^2 dx=0. \tag{35}$$

Отметим, что соотношение (35) обычно записывают просто в виде (34), оговаривая, что равенство понимается в смысле сходимости в среднем.

Сходимость в среднем, как правило, достаточна для целей физики, так как две функции g_1, g_2, равные в среднем, т. е. такие, что $\int\limits_a^b |g_1-g_2|^2\,dx=0$, могут отличаться друг от друга лишь на множестве меры нуль (грубо говоря, на множестве точек, столь малом, что это не влияет на значение интегралов от g_1, g_2). Две такие функции в физике обычно могут считаться эквивалентными.

Доказательство (35) может быть основано на известном из анализа факте, что для любой функции g класса $\mathscr{L}^2(a,\ b)$ из множества функций этого же класса можно выделить последовательность $u_1, u_2, \ldots$ функций, имеющих непрерывные вторые производные и сходящихся к g в среднем, т. е. такую последовательность, что $(u_j-g,\ u_j-g)=\int\limits_a^b |u_j-g|^2\,dx \to 0$. Введем функцию

$$\psi_\eta(\zeta)=\begin{cases}1-e^{-\frac{\zeta^2}{\eta^2-\zeta^2}} & \text{при } \zeta\leqslant\eta,\\ 1 & \text{при } \zeta>\eta.\end{cases}$$

Она дифференцируема любое число раз по ζ, в интервале от $\zeta=\eta$ до $\zeta=0$ убывает от 1 до 0, при $\zeta=0$ она равна нулю вместе со всеми своими производными. Пусть $\eta_1,\ \eta_2,\ \ldots$ — последовательность сходящихся к нулю чисел и $g_j(x)=$ $=u_j(x)\,\psi_{\eta_j}(b-x)\,\psi_{\eta_j}(x-a)$. Функция $g_j(x)$ имеет непрерывные вторые производные, при $x=a$ и $x=b$ она и ее первые производные обращаются в нуль, так что граничные условия (14) удовлетворяются автоматически, а в интервале $[a+\eta_j,\ b-\eta_j]$ она равна $u_j(x)$.

Функции g_j в среднем сходятся к g. Действительно,

$$\int\limits_a^b\left|g-g_j\right|^2dx=\int\limits_a^{a+\eta_j}\left|g-g_j\right|^2dx+\int\limits_{a+\eta_j}^{b-\eta_j}\left|g-u_j\right|^2dx+\int\limits_{b-\eta_j}^{b}\left|g-g_j\right|^2dx.$$

С ростом j интегралы от a до $a+\eta_j$ и от $b-\eta_j$ до b стремятся к нулю, так как $\eta_j\longrightarrow 0$, а функция $(g-g_j)\in\mathscr{L}^2(a,\ b)$; интеграл же от $a+\eta_j$ до $b-\eta_j$ стремится к нулю, так как последовательность функций u_j сходится в среднем к g.

Рассмотрим неравенство

$$\left\{\int\limits_a^b\Big|g-\sum_{\alpha=0}^{N}(v_\alpha,\ g)\,v_\alpha\Big|^2dx\right\}^{\frac{1}{2}}\equiv\left\{\int\limits_a^b\Big|g-g_j+g_j-\sum_{\alpha=0}^{N}(v_\alpha,\ g_j)\,v_\alpha+\right.$$

$$\left.+\sum_{\alpha=0}^{N}(v_\alpha,\ g_j-g)\,v_\alpha\Big|^2dx\right\}^{\frac{1}{2}}\leqslant(g-g_j,\ g-g_j)^{\frac{1}{2}}+$$

$$+\left\{\int\limits_a^b\Big|g_j-\sum_{\alpha=0}^{N}(v_\alpha,\ g_j)\,v_\alpha\Big|^2dx\right\}^{\frac{1}{2}}+\left\{\sum_{\alpha=0}^{N}\Big|(v_\alpha,\ g_j-g)\Big|^2\right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Оно следует из неравенства $(g_1+g_2,\ g_1+g_2)^{\frac{1}{2}}\leqslant(g_1,\ g_1)^{\frac{1}{2}}+$ $+(g_2,\ g_2)^{\frac{1}{2}}$ и ортогональности нормированных функций v_α. Так как функции g_j удовлетворяют условиям разложения в ряд (34), то существует число N_ε такое, что при $N>N_\varepsilon$ второй член в правой части неравенства меньше любого заданного числа $\varepsilon>0$.

Последний член правой части, в силу неравенства Бесселя (33), не превосходит первого, который при достаточно большом j становится меньше ε, так как функции g_j в среднем сходятся к g. Следовательно, левая часть неравенства меньше наперед заданного числа 3ε. Это доказывает (35).

Укажем, что для граничной задачи:

$$Lv=-(pv')'+qv=lv, \quad x\in(a, b), \quad p(a)=p(b),$$
$$v(a)=v(b), \quad v'(a)=v'(b)$$

с периодическим граничным условием справедливо все изложенное выше, с тем лишь возможным отличием, что каждому собственному числу соответствует не одна, а две линейно независимые собственные функции. В этом последнем случае указанные выше соотношения сохраняют вид, если линейно независимые собственные функции, принадлежащие одному собственному числу, выбрать так, чтобы они были взаимно ортогональны (это всегда возможно ввиду их линейной независимости).

Задача

$$-v''=lv, \quad v(0)=v(2\pi), \quad v'(0)=v'(2\pi)$$

является примером граничной задачи с периодическим граничным условием. Ее собственные числа образуют натуральный ряд 1, 2, 3, ... Каждому собственному числу λ принадлежат две линейно независимые собственные функции, в качестве которых могут быть выбраны взаимно ортогональные на интервале $[0, 2\pi]$ функции $\sin\sqrt{\lambda}x$ и $\cos\sqrt{\lambda}x$.

Наконец, упомянем, что для полной общности теоремы разложения интегралы в (35) и при вычислении коэффициентов Фурье (v_α, g) должны пониматься в смысле Лебега. В этом случае справедлива также *теорема Рисса—Фишера*, взаимная с рассмотренной теоремой разложения: если $c_1, c_2, \ldots$ — последовательность комплексных чисел, такая, что ряд $|c_1|^2+|c_2|^2+\ldots$ сходится, то существует функция $g(x)\in\mathscr{L}^2(a, b)$, для которой коэффициенты Фурье $(v_\alpha, g)=c_\alpha$ и справедливо разложение (35). Если интегралы понимаются в смысле Римана, то разложение (35) справедливо, например, для всех кусочно непрерывных функций.

ЗАДАЧА

Показать, что если для функции g справедливо *равенство Парсеваля*:

$$(g, g)=\sum_{\alpha=0}^{\infty}|(v_\alpha, g)|^2,$$

то она разлагается в ряд (34) в смысле сходимости в среднем.

Указание. Использовать равенство

$$\int_a^b \left| g - \sum_{\alpha=0}^{N} (v_\alpha,\ g)\, v_\alpha \right|^2 dx = (g,\ g) - \sum_{\alpha=0}^{N} \left| (v_\alpha,\ g) \right|^2.$$

§ 6. Сингулярная задача Штурма—Лиувилля

Выше рассматривалась задача Штурма—Лиувилля для конечного интервала $[a,\ b]$ и уравнения, коэффициенты которого не имели особенностей. Если коэффициенты уравнения имеют особенности на концах интервала $[a,\ b]$, но интегралы от величин $\left|\frac{p'}{p}\right|$, $\left|\frac{q}{p}\right|$ и $\left|\frac{1}{p}\right|$ конечны, то результаты § 5 остаются в силе. Если же упомянутые интегралы расходятся или интервал бесконечен—в этих случаях говорят о *сингулярной* задаче Штурма—Лиувилля,—то изложенная выше теория непосредственно неприменима. Распространение ее на сингулярную задачу требует выполнения предельного перехода: от конечного интервала к бесконечному или от конечного интервала, не содержащего особенностей в коэффициентах, к интервалу, на одном или обоих концах которого есть неинтегрируемые особенности. Техника выполнения обоих этих предельных переходов аналогична, как и результаты. В связи с этим для определенности рассмотрим подробно только расширение теории на бесконечный интервал $[a,\ \infty)$, где $|a| < \infty$.

В случае сингулярной задачи полной *счетной* системы собственных функций может не оказаться. Тогда место разложения произвольной функции в бесконечный ряд по собственным функциям задачи занимает представление этой функции в форме интеграла. Это приводит к интегральным соотношениям, таким, как преобразования Фурье и Лапласа, оказавшимся эффективными при решении многих проблем техники и теоретической физики.

Рассмотрим уравнение

$$Lv = -(pv')' + qv = lv \tag{36}$$

в интервале $[a,\ \infty)$. Как и ранее, примем, что функции p, p' и q вещественны и непрерывны, а $p > 0$.

Обозначим символом $\mathscr{L}^2(a,\ \infty)$ класс функций с квадратом модуля, интегрируемым на интервале $[a,\ \infty)$.

Укажем без доказательства важное свойство оператора L: если все решения уравнения $Lv = lv$ принадлежат классу $\mathscr{L}^2(a,\ \infty)$ при некотором одном комплексном значении l, то они принадлежат этому классу и при всех комплексных значениях l.