Указание. Использовать равенство

$$\int_a^b \left| g - \sum_{\alpha=0}^{N} (v_\alpha, g) v_\alpha \right|^2 dx = (g, g) - \sum_{\alpha=0}^{N} \left| (v_\alpha, g) \right|^2.$$

§ 6. Сингулярная задача Штурма—Лиувилля

Выше рассматривалась задача Штурма—Лиувилля для конечного интервала $[a, b]$ и уравнения, коэффициенты которого не имели особенностей. Если коэффициенты уравнения имеют особенности на концах интервала $[a, b]$, но интегралы от величин $\left|\frac{p'}{p}\right|$, $\left|\frac{q}{p}\right|$ и $\left|\frac{1}{p}\right|$ конечны, то результаты § 5 остаются в силе. Если же упомянутые интегралы расходятся или интервал бесконечен—в этих случаях говорят о *сингулярной* задаче Штурма—Лиувилля,—то изложенная выше теория непосредственно неприменима. Распространение ее на сингулярную задачу требует выполнения предельного перехода: от конечного интервала к бесконечному или от конечного интервала, не содержащего особенностей в коэффициентах, к интервалу, на одном или обоих концах которого есть неинтегрируемые особенности. Техника выполнения обоих этих предельных переходов аналогична, как и результаты. В связи с этим для определенности рассмотрим подробно только расширение теории на бесконечный интервал $[a, \infty)$, где $|a| < \infty$.

В случае сингулярной задачи полной *счетной* системы собственных функций может не оказаться. Тогда место разложения произвольной функции в бесконечный ряд по собственным функциям задачи занимает представление этой функции в форме интеграла. Это приводит к интегральным соотношениям, таким, как преобразования Фурье и Лапласа, оказавшимся эффективными при решении многих проблем техники и теоретической физики.

Рассмотрим уравнение

$$Lv = -(pv')' + qv = lv \tag{36}$$

в интервале $[a, \infty)$. Как и ранее, примем, что функции p, p' и q вещественны и непрерывны, а $p > 0$.

Обозначим символом $\mathscr{L}^2(a, \infty)$ класс функций с квадратом модуля, интегрируемым на интервале $[a, \infty)$.

Укажем без доказательства важное свойство оператора L: если все решения уравнения $Lv = lv$ принадлежат классу $\mathscr{L}^2(a, \infty)$ при некотором одном комплексном значении l, то они принадлежат этому классу и при всех комплексных значениях l.

Пусть $\chi(x, l)$ и $\psi(x, l)$ — решения уравнения $Lv = lv$, удовлетворяющие начальным условиям:

$$\chi(a, l) = \sin\alpha, \quad p(a)\chi'(a, l) = -\cos\alpha, \tag{37}$$

$$\psi(a, l) = \cos\alpha, \quad p(a)\psi'(a, l) = \sin\alpha, \tag{38}$$

$$0 \leqslant \alpha < \pi.$$

Эти решения линейно независимы. В самом деле, их определитель Вронского при $x = a$ удовлетворяет соотношению

$$pW(\chi, \psi) = 1. \tag{39}$$

Но, в силу тождества Лагранжа (5), это равенство сохраняется при всех x.

Из линейной независимости χ и ψ следует, что с точностью до множителя любое решение уравнения $Lv = lv$, отличное от ψ, можно представить в виде

$$v(x, l) = \chi(x, l) + m\psi(x, l), \tag{40}$$

где m — комплексное число.

Пусть $\operatorname{Im} l \neq 0$ (символ Im означает «мнимая часть»). Рассмотрим многообразие решений $v(x, l)$, удовлетворяющих вещественному граничному условию

$$v(b, l)\cos\beta + p(b)v'(b, l)\sin\beta = 0, \tag{41}$$

$$0 \leqslant \beta < \pi, \quad b < \infty.$$

Условие (41) накладывает на m определенные ограничения, так что допустимые значения m будут функцией $m(l; b, \beta)$ комплексного переменного l и вещественных параметров b и β.

Покажем, что при фиксированных l и b значения m лежат на некоторой окружности в комплексной плоскости. Переписав (41) в форме

$$\frac{v'(b, l)}{v(b, l)} = -\frac{\operatorname{ctg}\beta}{p(b)}, \tag{42}$$

видим, что отношение $\frac{v'}{v}$ вещественно, а поэтому определитель Вронского

$$W(v, \overset{*}{v}) = v\overset{*}{v}{}' - v'\overset{*}{v} = 0 \quad \text{при } x = b. \tag{43}$$

Обратно, если выполняется (43), то отношение $\frac{v'(b, l)}{v(b, l)}$ вещественно. Следовательно, условие (43) необходимо и достаточно, чтобы функция $v(x, l)$ при некотором β удовлетворяла условию вида (41). Подставив (40) в (43), получим

$$\frac{W(v, \overset{*}{v})}{W(\psi, \overset{*}{\psi})} = m\overset{*}{m} - \overset{*}{m}M_b - m\overset{*}{M}_b + M_b\overset{*}{M}_b - R_b^2 = |m - M_b|^2 - R_b^2 = 0, \tag{44}$$

где

$$M_b = \left.\frac{W(\overset{*}{\psi}, \chi)}{W(\psi, \overset{*}{\psi})}\right|_{x=b}, \quad R_b = \left|\frac{W(\chi, \overset{*}{\chi})}{W(\psi, \overset{*}{\psi})} - M_b \overset{*}{M}_b\right|^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{|pW(\psi, \overset{*}{\psi})|}, \tag{45}$$

$$x=b, \quad \operatorname{Im} l \neq 0.$$

При вычислении R_b учтено равенство (39).

Уравнение (44) на плоскости комплексного переменного m есть уравнение окружности с центром в точке M_b и радиусом R_b. Подставив (40) в (41), получим уравнение этой окружности в форме:

$$m = -\frac{\chi(b, l)\operatorname{ctg}\beta + p(b)\chi'(b, l)}{\psi(b, l)\operatorname{ctg}\beta + p(b)\psi'(b, l)}, \tag{46}$$

явно выражающей зависимость значения m от значения β. При фиксированных l, b и изменении β от 0 до π точка m, как легко видеть, обходит рассматриваемую окружность. Для ее обозначения также будем пользоваться введенным выше символом $m(l; b, \beta)$, подразумевая, что когда речь идет об окружности $m(l; b, \beta)$, то значения l и b фиксированы, а когда о функции $m(l; b, \beta)$, то это — функция комплексного переменного l и вещественных параметров b, β. Каждой паре значений b, l соответствует своя окружность $m(l; b, \beta)$.

Пусть l с $\operatorname{Im} l \neq 0$ фиксировано, а параметр b возрастает. Установим, как при этом меняется окружность $m(l; b, \beta)$. Из (44) следует, что в точках круга $|m - M_b|^2 - R_b^2 \leqslant 0$, имеющего окружность $m(l; b, \beta)$ своей границей,

$$\frac{W(v, \overset{*}{v})}{W(\psi, \overset{*}{\psi})} \leqslant 0. \tag{47}$$

Равенству соответствует сама окружность $m(l; b, \beta)$. В силу теоремы Грина (6),

$$\int_a^b (\overset{*}{v} Lv - v L\overset{*}{v})\, dx = (l - \overset{*}{l}) \int_a^b |v|^2 dx = [pW(v, \overset{*}{v})]_{x=b} - [pW(v, \overset{*}{v})]_{x=a}, \tag{48}$$

$$\int_a^b (\overset{*}{\psi} L\psi - \psi L\overset{*}{\psi})\, dx = (l - \overset{*}{l}) \int_a^b |\psi|^2 dx = [pW(\psi, \overset{*}{\psi})]_{x=b}. \tag{49}$$

Здесь учтено, что ввиду (37)—(38) функции ψ и ψ' вещественны при $x=a$, а поэтому определитель $W(\psi, \overset{*}{\psi})|_{x=a} = 0$. Ввиду (37), (39) и (40) (символ Im означает «мнимая часть»)

$$[pW(v, \overset{*}{v})]_{x=a} = m - \overset{*}{m} = 2i \operatorname{Im} m. \tag{50}$$

Заметив, что $l-\bar{l}=2i\,\mathrm{Im}\,l$, и используя полученные соотношения, преобразуем неравенство (47) к виду

$$\int_a^b |v|^2\,dx \leqslant \frac{\mathrm{Im}\,m}{\mathrm{Im}\,l}, \quad \mathrm{Im}\,l \neq 0. \tag{51}$$

Знак равенства, как и выше, соответствует положению точки m на окружности $m(l;\ b,\ \beta)$ и, следовательно, вещественному граничному условию (41). В этом случае

$$(\mathrm{Im}\,l)\int_a^b |v|^2\,dx = \mathrm{Im}\,m(l;\ b,\ \beta). \tag{52}$$

Далее из (49) и (45) найдем, что

$$R_b = \left|2(\mathrm{Im}\,l)\int_a^b |\psi|^2\,dx\right|^{-1}, \ \mathrm{Im}\,l \neq 0. \tag{53}$$

Фиксируем число $\hat{m}$. Пусть при некотором $b=b_1$ число $\hat{m}$ лежит на окружности $m(l;\ b_1,\ \beta)$, так что в (51) имеет место знак равенства. Так как левая часть (51) — монотонно растущая функция b, то при $b=b_2>b_1$ неравенство (51) не будет соблюдено, т. е. число $\hat{m}$, лежащее на окружности $m(l;\ b_1,\ \beta)$, будет лежать вне окружности $m(l;\ b_2,\ \beta)$. Отсюда следует, что окружность $m(l;\ b_2,\ \beta)$ при $b_2>b_1$ лежит внутри окружности $m(l;\ b_1,\ \beta)$. Таким образом, *с ростом b окружность $m(l;\ b,\ \beta)$ сжимается* и возможны два варианта:

а) окружности $m(l;\ b,\ \beta)$ с ростом b стягиваются к *предельной окружности* $m_\infty(l;\ c)$ с радиусом $R_\infty>0$. Через c здесь обозначен параметр, при изменении которого в некоторых пределах и фиксированном l величина $m_\infty(l;\ c)$ принимает все значения, принадлежащие предельной окружности.

Если имеет место случай предельной окружности, то все решения уравнения $Lv=lv$ при $\mathrm{Im}\,l\neq 0$ принадлежат классу $\mathscr{L}^2(a,\ \infty)$. Действительно, любое число $\hat{m}$, лежащее на окружности $m_\infty(l;\ c)$, лежит внутри любого из кругов с границей $m(l;\ b,\ \beta)$ и, следовательно, для $m=\hat{m}$ при любом b неравенство (51) выполняется строго. Это значит, что интеграл в левой части (51) сходится, т. е.

$$v=(\chi+\hat{m}\psi)\in\mathscr{L}^2(a,\ \infty). \tag{54}$$

Из (53) вытекает, что и $\psi\in\mathscr{L}^2(a,\infty)$, а поэтому и $\chi=v-\hat{m}\psi\in\mathscr{L}^2(a,\ \infty)$. Так как два линейно независимых решения уравнения $Lv=lv$ принадлежат классу $\mathscr{L}^2(a,\ \infty)$, то и все его решения принадлежат этому классу;

б) окружности $m(l;\ b,\ \beta)$ стягиваются к *предельной точке* $m_\infty(l)$, так что $R_b \to 0$ при $b \to \infty$. Из (53) тогда следует, что решение ψ при $\operatorname{Im} l \neq 0$ не принадлежит классу $\mathscr{L}^2(a,\ \infty)$, а ввиду того, что этот вывод не зависит от выбора числа α в начальном условии (37), то и любое решение уравнения $Lv = lv$, $\operatorname{Im} l \neq 0$, удовлетворяющее вещественным начальным условиям, не принадлежит этому классу. Из (51), однако, следует, что при $\operatorname{Im} l \neq 0$ существует линейно независимое от ψ решение класса $\mathscr{L}^2(a,\ \infty)$, именно:

$$\chi + m_\infty \psi = v \in \mathscr{L}^2(a,\ \infty), \qquad \operatorname{Im} l \neq 0. \tag{55}$$

Двух линейно независимых решений, принадлежащих классу $\mathscr{L}^2(a,\ \infty)$, существовать не может, так как тогда и все решения уравнения $Lv = lv$ принадлежали бы $\mathscr{L}^2(a,\ \infty)$, что противоречит $\psi \notin \mathscr{L}^2(a,\ \infty)$. Итак, тогда, когда имеет место случай предельной точки, уравнение $Lv = lv$ при $\operatorname{Im} l \neq 0$ имеет одно и только одно линейно независимое решение класса $\mathscr{L}^2(a,\ \infty)$

Так как, по сказанному выше, принадлежность всех решений уравнения $Lv = lv$ классу $\mathscr{L}^2(a,\ \infty)$ есть свойство оператора L, не зависящее от значения l, то и появление при $b \to \infty$ предельной точки или предельной окружности — также свойство только оператора L. Тем самым возможны два класса сингулярных задач Штурма — Лиувилля, соответствующих случаям предельной окружности и предельной точки. Примеры (см., например, § 10) показывают, что эти классы не пусты.

§ 7. Разложение по собственным функциям сингулярной задачи Штурма — Лиувилля на полубесконечном интервале

Разложение по собственным функциям сингулярной задачи, как упоминалось, может содержать как сумму, так и интеграл. Удобно — и фактически так обычно и поступают — использовать интеграл *Стилтьеса**. Тогда *сумму можно включить в интеграл* и формулы приобретают простой вид. Укажем определение интеграла Стилтьеса, что достаточно для понимания выкладок и смысла формул.

Пусть $g(x)$ и $\sigma(x)$ функции, определенные и конечные на интервале $[a,\ b]$, а система неравенств: $a = x_0 < x_1 < \ldots x_{n-1} < x_n = b$ задает подразделение интервала $[a,\ b]$ на части. Составим сумму

$$\sum_{\alpha=1}^{n} g(x_\alpha)\,[\sigma(x_\alpha) - \sigma(x_{\alpha-1})]. \tag{56}$$

Если при беспредельном увеличении числа подразделяющих точек x_α и уменьшении интервалов $(x_\alpha,\ x_{\alpha-1})$ сумма (56) стремится

---

* В. И. Смирнов [1], т. V, § 2 и 48, Э. Х. Гохман [19], Г. Е. Шилов [61] и др.