б) окружности $m(l; b, \beta)$ стягиваются к *предельной точке* $m_\infty(l)$, так что $R_b \to 0$ при $b \to \infty$. Из (53) тогда следует, что решение ψ при $\operatorname{Im} l \neq 0$ не принадлежит классу $\mathscr{L}^2(a, \infty)$, а ввиду того, что этот вывод не зависит от выбора числа α в начальном условии (37), то и любое решение уравнения $Lv = lv$, $\operatorname{Im} l \neq 0$, удовлетворяющее вещественным начальным условиям, не принадлежит этому классу. Из (51), однако, следует, что при $\operatorname{Im} l \neq 0$ существует линейно независимое от ψ решение класса $\mathscr{L}^2(a, \infty)$, именно:

$$\chi + m_\infty \psi = v \in \mathscr{L}^2(a, \infty), \qquad \operatorname{Im} l \neq 0. \tag{55}$$

Двух линейно независимых решений, принадлежащих классу $\mathscr{L}^2(a, \infty)$, существовать не может, так как тогда и все решения уравнения $Lv = lv$ принадлежали бы $\mathscr{L}^2(a, \infty)$, что противоречит $\psi \notin \mathscr{L}^2(a, \infty)$. Итак, тогда, когда имеет место случай предельной точки, уравнение $Lv = lv$ при $\operatorname{Im} l \neq 0$ имеет одно и только одно линейно независимое решение класса $\mathscr{L}^2(a, \infty)$

Так как, по сказанному выше, принадлежность всех решений уравнения $Lv = lv$ классу $\mathscr{L}^2(a, \infty)$ есть свойство оператора L, не зависящее от значения l, то и появление при $b \to \infty$ предельной точки или предельной окружности — также свойство только оператора L. Тем самым возможны два класса сингулярных задач Штурма — Лиувилля, соответствующих случаям предельной окружности и предельной точки. Примеры (см., например, § 10) показывают, что эти классы не пусты.

§ 7. Разложение по собственным функциям сингулярной задачи Штурма — Лиувилля на полубесконечном интервале

Разложение по собственным функциям сингулярной задачи, как упоминалось, может содержать как сумму, так и интеграл. Удобно — и фактически так обычно и поступают — использовать интеграл *Стилтьеса**. Тогда *сумму можно включить в интеграл* и формулы приобретают простой вид. Укажем определение интеграла Стилтьеса, что достаточно для понимания выкладок и смысла формул.

Пусть $g(x)$ и $\sigma(x)$ функции, определенные и конечные на интервале $[a, b]$, а система неравенств: $a = x_0 < x_1 < \ldots x_{n-1} < x_n = b$ задает подразделение интервала $[a, b]$ на части. Составим сумму

$$\sum_{\alpha=1}^{n} g(x_\alpha)\left[\sigma(x_\alpha) - \sigma(x_{\alpha-1})\right]. \tag{56}$$

Если при беспредельном увеличении числа подразделяющих точек x_α и уменьшении интервалов $(x_\alpha, x_{\alpha-1})$ сумма (56) стремится

---

* В. И. Смирнов [1], т. V, §2 и 48, Э. Х. Гохман [19], Г. Е. Шилов [61] и др.

к пределу, не зависящему от выбора подразделяющих точек, то этот предел называют *интегралом Стилтьеса от функции* $g(x)$ *по функции* $\sigma(x)$ на интервале $[a, b]$ и обозначают символом

$$\int_a^b g(x)\,d\sigma(x).$$

Интеграл Стилтьеса совпадает с интегралом Римана, когда $\sigma(x)=x$. Если функция $\sigma(x)$ имеет интегрируемую производную, то интеграл Стилтьеса выражается через интеграл Римана:

$$\int_a^b g(x)\,d\sigma(x) = \int_a^b g(x)\,\sigma'(x)\,dx. \tag{57}$$

Нас будут интересовать интегралы по неубывающим функциям $\sigma(\lambda)$, имеющим конечные разрывы (скачки), когда аргумент λ пробегает все вещественные значения от $-\infty$ до ∞. Простейшим примером является широко употребляемая «единичная ступенчатая функция»:

$$\theta(\lambda-\lambda_j)=\begin{cases} 1, \text{ когда } \lambda\in[\lambda_j, \infty) \text{ (или, что то же, } \lambda\geqslant\lambda_j) \\ 0, \text{ когда } \lambda\in(-\infty, \lambda_j) \text{ (или } \lambda<\lambda_j), \end{cases}$$

имеющая в точке $\lambda=\lambda_j$ разрыв (скачок) $\theta(\lambda_j)-\theta(\lambda_j-0)=1$. Заметим, что эта функция определена так, что она непрерывна при приближении к точке λ_j справа. Из определения интегральных сумм (56) для интеграла Стилтьеса ясно, что*

$$\int_\mu^\nu g(\lambda)\,d\theta(\lambda-\lambda_j)=\begin{cases} g(\lambda_j), \text{ если } \lambda_j\in(\mu, \nu], \\ 0\ \ , \text{ если } \lambda_j\notin(\mu, \nu]. \end{cases} \tag{58}$$

Функцию, меняющуюся только в точках $\lambda=\lambda_j$, принадлежащих некоторой последовательности $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$, где она имеет конечные разрывы (скачки), равные c_j, называют *ступенчатой функцией* или *функцией скачков.* Ее всегда можно представить в виде суммы (конечной или бесконечной):

$$\sum_{(\alpha)} c_\alpha\theta(\lambda-\lambda_\alpha), \tag{59}$$

где θ — единичная ступенчатая функция.

---

* Этот пример, в частности, показывает, что интеграл Стилтьеса может сохранять смысл и тогда, когда соответствующего ему интеграла Римана не существует. Отметим, что часто записывают: $d\theta(\lambda-\lambda_j)=\delta(\lambda-\lambda_j)\,d\lambda$, где $\delta(\lambda-\lambda_j)$ — дельта-функция. Тогда из правил действий с дельта-функцией тоже следует (58). Интеграл в (58) при этом, однако, также нельзя понимать в смысле Римана: интеграл Римана от дельта-функции не существует. Правила действий с дельта-функцией тем не менее могут быть строго обоснованы и включение сумм в интегралы можно основывать на них.

Точки λ, такие, что в любой их окрестности есть пара точек, в которых *неубывающая* функция $\sigma(\lambda)$ имеет различные значения, называют *точками роста* функции $\sigma(\lambda)$. В точках роста $\sigma(\lambda)$ может оставаться непрерывной или иметь скачки. В общем случае нас будут интересовать неубывающие функции $\sigma(\lambda)$, множество точек роста которых состоит не только из точек скачков. Примером может служить функция $\sigma(\lambda)=\sigma_0(\lambda)+\sigma_1(\lambda)$, где $\sigma_1(\lambda)$ — функция скачков вида (59), а $\sigma_0(\lambda)$ — неубывающая функция, не имеющая разрывов. Ввиду (58) при такой $\sigma(\lambda)$ интеграл Стилтьеса

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(\lambda)\,d\sigma(\lambda)=\sum_{(\alpha)} c_\alpha g(\lambda_\alpha)+\int_{-\infty}^{\infty} g(\lambda)\,d\sigma_0(\lambda).$$

После этих предварительных замечаний обратимся к задаче Штурма — Лиувилля:

$$Lv=-(pv')'+qv=lv, \qquad x\in(a, b), \tag{60}$$

$$v(a)\sin\alpha-p(a)v'(a)\cos\alpha=0, \qquad v(b)\cos\beta+p(b)v'(b)\sin\beta=0, \tag{61}$$
$$0\leqslant\alpha,\ \beta<\pi.$$

Если $b\to\infty$, она переходит в сингулярную граничную задачу:

$$Lv=-(pv')'+qv=lv, \quad x\in(a, \infty), \tag{62}$$
$$v(a)\sin\alpha-p(a)v'(a)\cos\alpha=0. \tag{63}$$

Обозначим через $\{\lambda_j^b\}$ последовательность собственных чисел задачи (60)—(61) с конечным интервалом $[a, b]$, а через $\{v_j^b\}$ — последовательность ее нормированных собственных функций. Пусть $\psi(x, l)$, как и выше,— решение уравнения (60), удовлетворяющее начальному условию (38). Тогда оно удовлетворяет и первому из граничных условий (61). Следовательно, когда параметр l равен собственному числу λ_j задачи (60)—(61), то ψ — собственная функция, принадлежащая λ_j, т. е.

$$v_j^b(x)=c_j^b\,\psi(x, \lambda_j^b), \tag{64}$$

где c_j^b — нормирующий множитель.

Пусть $g(x)\in\mathscr{L}^2(a, b)$

и

$$\bar{g}(l)=\int_a^b \overset{*}{\psi}(x, l)\,g(x)\,dx. \tag{65}$$

Функцию $g(x)$ можно разложить в ряд (34), сходящийся к ней в среднем. При обозначениях (64)—(65) он имеет вид

$$g(x)=\sum_{\alpha=0}^{\infty}|c_\alpha^b|^2\,\bar{g}(\lambda_\alpha^b)\,\psi(x, \lambda_\alpha^b).$$

Введем функцию скачков $\sigma^b(\lambda)$, имеющую скачки $|c_j^b|^2$ при $\lambda=\lambda_j^b$. Тогда ряд для $g(x)$ можно переписать в виде

$$g(x)=\int_{-\infty}^{\infty}\bar{g}(\lambda)\,\psi(x,\ \lambda)\,d\sigma^b(\lambda). \tag{66}$$

Пусть теперь верхняя граница b интервала $[a, b]$ пробегает неограниченно возрастающую бесконечную последовательность b_1, b_2, ... чисел b_j, а величина β в граничном условии (61) — произвольно заданную бесконечную последовательность β_1, β_2, ... чисел β_j, $0\leqslant\beta_j<\pi$. Сопоставим каждому числу b_j число β_j с тем же j. Тогда последовательность пар b_1; b_2, β_2 ... определит некоторую последовательность σ_1, σ_2, ... функций $\sigma_{\beta_1}(\lambda)$ из (66) и последовательность чисел $m(l;\ b_j,\ \beta_j)$, лежащих на окружностях $m(l;\ b_j,\ \beta)$, определенных в предыдущем параграфе.

Справедливы следующие предложения, которые приведем без доказательства:

Из последовательности b_1, β_1; b_2, β_2, ... можно выделить такую бесконечную подпоследовательность, что для соответствующей ей последовательности чисел j существуют пределы

$$\lim_{j\to\infty} m(l;\ b_j,\ \beta_j)=m_\infty(l), \tag{67}$$

$$\lim_{j\to\infty}\sigma_j(\lambda)=\sigma(\lambda), \tag{68}$$

где $m_\infty(l)$ — *предельная точка или точка предельной окружности* $m_\infty(l;\ c)$ (*в зависимости от свойств оператора* L), а $\sigma(\lambda)$ — *неубывающая функция, удовлетворяющая неравенству*

$$|\sigma(\lambda)|\leqslant k(1+\lambda^2), \tag{69}$$

где k — *положительное число. В случае предельной точки функция* $\sigma(\lambda)$ *не зависит от выбора последовательности пар* b_j, β_j. *В случае предельной окружности для каждого значения* c *найдется такая последовательность пар* b_j, β_j, *что* $m_\infty(l)=m_\infty(l;\ c)$; *при этом функция* $\sigma(\lambda)$ зависит от c.

Отметим, что так как $\sigma(\lambda)$ — неубывающая функция, а ввиду (69) она ограничена на каждом конечном интервале, то число ее точек скачков не более, чем счетно.

Если $g(x)\in\mathscr{L}^2(a,\ \infty)$, *то существует функция*

$$\bar{g}(l)=\int_a^{\infty}\overset{*}{\psi}(x,\ l)\,g(x)\,dx, \tag{70}$$

где $\psi(x,\ l)$ — *решение уравнения* (62), *удовлетворяющее начальному условию*

$$\psi(a,\ l)=\cos\alpha,\ \ p(a)\,\psi'(a,\ l)=\sin\alpha,$$

и в смысле сходимости в среднем справедливо разложение

$$g(x)=\int_{-\infty}^{\infty}\bar{g}(\lambda)\,\psi(x,\lambda)\,d\sigma(\lambda), \tag{71}$$

где интегрирование ведется вдоль вещественной оси.

Отметим, что равенства (70) и (71) можно записать в форме

$$g(x)=\int_{-\infty}^{\infty}\psi(x,\lambda)\,d\sigma(\lambda)\int_{a}^{\infty}\psi(\xi,\lambda)\,g(\xi)\,d\xi. \tag{72}$$

Соотношения (70)—(71) являются обобщением соотношений (65)—(66) на сингулярную задачу. Они устанавливают возможность разложения любой функции $g(x)\in\mathscr{L}^2(a,\ \infty)$ по функциям $\psi(x,\ \lambda)$.

Соотношения (70)—(71) можно обратить, рассматривая (70) как разложение функции $\bar{g}(l)$, а (71)—как определение $g(x)$. Это часто необходимо в теоретической физике. Чтобы соотношения (70)—(71) были справедливы для любых функций $g\in\mathscr{L}^2(a,\ \infty)$ и $\bar{g}\in\mathscr{L}^2(-\infty,\ \infty)$, интегралы в (70)—(71) должны определяться с помощью теории меры Лебега (это ведет к понятию интеграла Лебега—Стилтьеса). В курсах физики об этом не всегда упоминается, так как техника выкладок практически не нуждается в изменениях, а опасность фактической ошибки невелика: существование связи типа (70)—(71) между двумя функциями обычно вытекает из существа физической задачи или постулируется (квантовая механика).

§ 8. Вычисление спектральной функции (полубесконечный интервал)

Чтобы практически осуществить разложение (70)—(71), необходимо определить *спектральную функцию* $\sigma(\lambda)$. От ее свойств и зависит, какие именно из функций $\psi(x,\ l)$ участвуют в разложении. Если $\sigma(\lambda)$—функция скачков со скачками в точках λ_j, то в разложении играют роль только функции $\psi(x,\ \lambda_j)$, образующие в совокупности полную счетную систему. В общем же случае множество точек роста функции $\sigma(x)$ может состоять из счетной последовательности точек, где она имеет скачки, и точек, заполняющих целые интервалы вещественной оси или, быть может, всю ось. Тогда полную систему на интервале $[a,\ \infty)$ образуют функции $\psi(x,\ \lambda)$, соответствующие как счетной последовательности $\{\lambda_j\}$ точек скачков, так и некоторому непрерывному множеству значений λ. Разложение функции $g(x)\in\mathscr{L}^2(a,\ \infty)$ по функциям $\psi(x,\ \lambda)$ будет при этом включать интеграл.

Совокупность точек роста спектральной функции $\sigma(\lambda)$ называют *спектром сингулярной задачи* (62)—(63), причем совокуп-