и в смысле сходимости в среднем справедливо разложение

$$g(x)=\int_{-\infty}^{\infty}\bar{g}(\lambda)\,\psi(x,\lambda)\,d\sigma(\lambda), \tag{71}$$

где интегрирование ведется вдоль вещественной оси.

Отметим, что равенства (70) и (71) можно записать в форме

$$g(x)=\int_{-\infty}^{\infty}\psi(x,\lambda)\,d\sigma(\lambda)\int_{a}^{\infty}\psi(\xi,\lambda)\,g(\xi)\,d\xi. \tag{72}$$

Соотношения (70)—(71) являются обобщением соотношений (65)—(66) на сингулярную задачу. Они устанавливают возможность разложения любой функции $g(x)\in\mathscr{L}^2(a,\ \infty)$ по функциям $\psi(x,\ \lambda)$.

Соотношения (70)—(71) можно обратить, рассматривая (70) как разложение функции $\bar{g}(l)$, а (71)—как определение $g(x)$. Это часто необходимо в теоретической физике. Чтобы соотношения (70)—(71) были справедливы для любых функций $g\in\mathscr{L}^2(a,\ \infty)$ и $\bar{g}\in\mathscr{L}^2(-\infty,\ \infty)$, интегралы в (70)—(71) должны определяться с помощью теории меры Лебега (это ведет к понятию интеграла Лебега—Стилтьеса). В курсах физики об этом не всегда упоминается, так как техника выкладок практически не нуждается в изменениях, а опасность фактической ошибки невелика: существование связи типа (70)—(71) между двумя функциями обычно вытекает из существа физической задачи или постулируется (квантовая механика).

§ 8. Вычисление спектральной функции (полубесконечный интервал)

Чтобы практически осуществить разложение (70)—(71), необходимо определить *спектральную функцию* $\sigma(\lambda)$. От ее свойств и зависит, какие именно из функций $\psi(x,\ l)$ участвуют в разложении. Если $\sigma(\lambda)$—функция скачков со скачками в точках λ_j, то в разложении играют роль только функции $\psi(x,\ \lambda_j)$, образующие в совокупности полную счетную систему. В общем же случае множество точек роста функции $\sigma(x)$ может состоять из счетной последовательности точек, где она имеет скачки, и точек, заполняющих целые интервалы вещественной оси или, быть может, всю ось. Тогда полную систему на интервале $[a,\ \infty)$ образуют функции $\psi(x,\ \lambda)$, соответствующие как счетной последовательности $\{\lambda_j\}$ точек скачков, так и некоторому непрерывному множеству значений λ. Разложение функции $g(x)\in\mathscr{L}^2(a,\ \infty)$ по функциям $\psi(x,\ \lambda)$ будет при этом включать интеграл.

Совокупность точек роста спектральной функции $\sigma(\lambda)$ называют *спектром сингулярной задачи* (62)—(63), причем совокупность точек, в которых спектральная функция имеет скачки, называют *дискретным* (или *точечным*) *спектром*, а совокупность точек роста, в которых спектральная функция непрерывна, — *непрерывным спектром.*

Спектральная функция $\sigma(\lambda)$ определяется тем, что сингулярная задача (62) — (63) — предельная в отношении задачи (60) — (61) с вещественным граничным условием при $x=b\to\infty$. Именно она зависит от предела (67), обобщающего условие вещественности (46) граничных данных при $x=b$. Укажем необходимые для ее вычисления соотношения без доказательства.

Если спектральная функция $\sigma(\lambda)$ непрерывна в точках λ и λ', то

$$\sigma(\lambda)-\sigma(\lambda')=\frac{1}{\pi}\lim_{\varepsilon\to+0}\int\limits_{\lambda'}^{\lambda}\operatorname{Im} m_\infty(\eta+i\varepsilon)\,d\eta, \tag{73}$$

где *интегрирование ведется вдоль прямой* $\operatorname{Im} l=\varepsilon=\text{const}$, *проходящей в верхней полуплоскости параллельно вещественной оси, причем переход к пределу* $\varepsilon=0$ *происходит из верхней полуплоскости*, а $m_\infty(l)$ — *предел (67), т. е. предельная точка или точка предельной окружности*. В последнем случае спектральная функция зависит от параметра c. Фактически, чтобы однозначно определить $\sigma(\lambda)$, нет необходимости знать зависимость $m_\infty(l;\,c)$ от c, достаточно указать значение $m_\infty(l)$ при некотором фиксированном l (см. мелкий шрифт в конце параграфа).

В случае предельной точки предел (67) $m_\infty(l)$ — *аналитическая функция* l в полуплоскости $\operatorname{Im} l>0$ (*и* $\operatorname{Im} l<0$), при $\operatorname{Im} l\neq 0$ *отношение* $\dfrac{\operatorname{Im} m_\infty(l)}{\operatorname{Im} l}>0$; *если на вещественной оси есть полюсы, то они простые, а вычеты в них отрицательны.*

В случае предельного круга предел (67) $m_\infty(l)=m_\infty(l;\,c)$ — *функция, аналитическая в любой конечной части плоскости комплексного переменного* l *всюду, за исключением особых точек, являющихся полюсами; все эти полюсы простые и расположены на вещественной оси, а вычеты в них отрицательны;* при *вещественных* l *значения* $m_\infty(l;\,c)$ *вещественны.*

Скачки спектральной функции (73) приходятся на *полюсы* $m_\infty(l)$, положение которых, таким образом, определяет точечный спектр.

Пусть $l=\lambda_j$ — полюс $m_\infty(l)$ и $l=\eta+i\varepsilon$. Вблизи λ_j

$$m_\infty(l)=\frac{c_{-1}}{l-\lambda_j}+\ldots=\frac{c_{-1}}{(\eta-\lambda_j)+i\varepsilon}+\ldots=c_{-1}\frac{(\eta-\lambda_j)-i\varepsilon}{(\eta-\lambda_j)^2+\varepsilon^2}+\ldots,$$

где c_{-1} — вычет функции $m_\infty(l)$ в полюсе λ_j, $\eta-\lambda_j$ и ε — малые числа, а многоточием обозначены члены, остающиеся конечными при $l=\lambda_j$. Выберем число $\delta>0$ столь малым, чтобы в интервале $[\lambda_j-\delta,\ \lambda_j+\delta]$ функция $m_\infty(l)$ не имела других полюсов кроме λ_j.

Это всегда можно сделать, так как полюсы — изолированные особые точки. Тогда при $\lambda' = \lambda_j - \delta$ и $\lambda = \lambda_j + \delta$ спектральная функция непрерывна и согласно (72)

$$\sigma(\lambda_j+\delta)-\sigma(\lambda_j-\delta)=\frac{1}{\pi}\lim_{\varepsilon\to+0}\int_{\lambda_j-\delta}^{\lambda_j+\delta}\operatorname{Im} m_\infty(\eta+i\varepsilon)\,d\eta=$$

$$=\frac{1}{\pi}\lim_{\varepsilon\to+0}\int_{\lambda_j-\delta}^{\lambda_j+\delta}\frac{-c_{-1}\varepsilon}{(\eta-\lambda_j)^2+\varepsilon^2}\,d\eta+\ldots=\frac{1}{\pi}\lim_{\varepsilon\to+0}\int_{-\delta}^{\delta}\frac{c_{-1}\varepsilon}{\xi^2+\varepsilon^2}\,d\xi+\ldots=$$

$$=-\frac{c_{-1}}{\pi}\lim_{\varepsilon\to+0}\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{\delta}{\varepsilon}-\operatorname{arc\,tg}\frac{-\delta}{\varepsilon}\right)+\ldots=-c_{-1}+\ldots$$

Многоточием здесь обозначены члены, стремящиеся к нулю вместе с δ. В пределе при $\delta\to 0$ получим

$$\sigma(\lambda_j+0)-\sigma(\lambda_j-0)=-c_{-1},$$

т. е. *скачок спектральной функции $\sigma(\lambda)$ в точке разрыва равен вычету в этой точке функции $m_\infty(l)$, взятому с обратным знаком.*

Если в интервале $[\lambda', \lambda]$ функция $m_\infty(l)$ не имеет полюсов, то в (73) можно перейти к пределу под знаком интеграла. Взяв затем дифференциал от обеих частей (73), получим

$$d\sigma(\lambda)=\frac{1}{\pi}\lim_{\varepsilon\to+0}\operatorname{Im} m_\infty(\lambda+i\varepsilon)\,d\lambda. \tag{74}$$

Если предел в правой части равен нулю, то $d\sigma(\lambda)=0$ и точка λ не является точкой роста спектральной функции, т. е. не принадлежит спектру. В случае предельного круга функция $m_\infty(l)= =m_\infty(l;\ c)$ вне полюсов непрерывна и вещественна на оси λ. Поэтому $\lim\limits_{\varepsilon\to+0}\operatorname{Im} m_\infty(\lambda+i\varepsilon)=\operatorname{Im} m_\infty(\lambda)=0$. Следовательно, *в случае предельного круга непрерывный спектр отсутствует* и разложение (71) есть бесконечный ряд.

В случае предельной точки функция $m_\infty(l)$ определена однозначно. Согласно (73) этим однозначно определен спектр и, значит, собственные функции сингулярной задачи (62) — (63). В случае же предельной окружности для однозначной формулировки сингулярной задачи к (62) — (63) необходимо присоединить условие на бесконечности.

Пусть $m_\infty(l_0)$ — точка предельной окружности $m_\infty(l_0;\ c)$, соответствующей фиксированному $l=l_0$, и $v_\infty(x,\ l_0)=\chi(x,\ l_0)+m_\infty(l_0)\,\psi(x,\ l_0)$. Можно показать, что если $\{\lambda_j\}$ — спектр задачи (62) — (63) при выборе на предельной окружности $m_\infty(l_0;\ c)$ точки $m_\infty(l_0)$, то определитель Вронского $W[\psi(x,\ l),\ v_\infty(x,\ l_0)]$ при $x\to\infty$ обращается в нуль, если l принадлежит спектру $\{\lambda_j\}$, и отличен от нуля в противном случае. Поэтому искомое условие на бесконечности можно записать в виде

$$W[\psi(x,\ l),\ v_\infty(x,\ l_0)]\big|_{x\to\infty}=0.$$

Из всего многообразия полных систем собственных функций задачи (62) — (63) им отбирается то, которое соответствует точке $m_\infty(l_0)$ на окружности $m_\infty(l_0;\ c)$.

Если интервал, для которого ставится задача Штурма—Лиувилля, конечен, но на его верхней границе $x=b$ коэффициенты уравнения имеют (неинтегрируемую) особенность, то все изложенное остается в силе, только предельный переход $b \to \infty$ заменяется переходом $b' \to b$ от интервала $[a, b']$, где $b' < b$, к интервалу $[a, b)$.

Если сингулярная задача Штурма—Лиувилля поставлена для интервала $(-\infty, a]$, то все нужные формулы получаются из указанных выше заменой пределов a, ∞ интегрирования по x на $-\infty$, a и функции $m_\infty(l)$ на функцию $m_{-\infty}(l)$, являющуюся *взятым с обратным знаком* пределом выражения (46) при $b \to -\infty$.

Укажем в заключение несколько простых признаков существования предельной точки:

а) $q(x) > -k$, где k — положительное число, а интеграл $\int\limits_{x_0}^{x} \frac{dx}{\sqrt{p}}$ расходится при $x \to \infty$ или к точке, в которой коэффициенты уравнения имеют особенность;

б) $p=1$, $q(x) \geqslant -kx^2$, где k — положительное число;

в) $p=1$, $q(x) \to \infty$ при $x \to \infty$ (отметим, что при выполнении этих условий спектр дискретен).

§ 9. Разложение по собственным функциям сингулярной задачи Штурма—Лиувилля на интервале, бесконечном в обе стороны

Основное отличие задачи Штурма—Лиувилля на интервале, бесконечном в обе стороны (или с особенностями на обоих концах интервала),— отсутствие граничных условий в обычном смысле. Если при $\pm\infty$ для оператора L имеет место случай предельной точки, то решение задачи вообще однозначно определяется уравнением. При этом, конечно, подразумевается, что задача на интервале $(-\infty, \infty)$ — предельная в отношении задачи на конечном интервале $[x_1, x_2]$ с вещественными граничными условиями:

$$Lv = -(pv)' + qv = lv, \quad x \in (x_1, x_2), \tag{75}$$

$$v(x_1)\cos\alpha - p(x_1)v'(x_1)\sin\alpha = 0; \quad v(x_2)\cos\beta + p(x_2)v'(x_2)\sin\beta = 0. \tag{76}$$

Пусть a — вещественное число, такое, что $x_1 < a < x_2$ и $\psi_1(x, l)$, $\psi_2(x, l)$ — два линейно независимых решения уравнения (75), удовлетворяющих *начальным* условиям:

$$\begin{aligned} \psi_1(a, l) &= 1, \quad p(a)\psi_1'(a, l) = 0, \\ \psi_2(a, l) &= 0, \quad p(a)\psi_2'(a, l) = 1. \end{aligned} \tag{77}$$