Если интервал, для которого ставится задача Штурма—Лиувилля, конечен, но на его верхней границе $x=b$ коэффициенты уравнения имеют (неинтегрируемую) особенность, то все изложенное остается в силе, только предельный переход $b \to \infty$ заменяется переходом $b' \to b$ от интервала $[a, b']$, где $b' < b$, к интервалу $[a, b)$.

Если сингулярная задача Штурма—Лиувилля поставлена для интервала $(-\infty, a]$, то все нужные формулы получаются из указанных выше заменой пределов $a$, $\infty$ интегрирования по $x$ на $-\infty$, $a$ и функции $m_\infty(l)$ на функцию $m_{-\infty}(l)$, являющуюся *взятым с обратным знаком* пределом выражения (46) при $b \to -\infty$.

Укажем в заключение несколько простых признаков существования предельной точки:

а) $q(x) > -k$, где $k$ — положительное число, а интеграл $\int\limits_{x_0}^{x} \frac{dx}{\sqrt{p}}$ расходится при $x \to \infty$ или к точке, в которой коэффициенты уравнения имеют особенность;

б) $p=1$, $q(x) \geqslant -kx^2$, где $k$ — положительное число;

в) $p=1$, $q(x) \to \infty$ при $x \to \infty$ (отметим, что при выполнении этих условий спектр дискретен).

## § 9. Разложение по собственным функциям сингулярной задачи Штурма—Лиувилля на интервале, бесконечном в обе стороны

Основное отличие задачи Штурма—Лиувилля на интервале, бесконечном в обе стороны (или с особенностями на обоих концах интервала),— отсутствие граничных условий в обычном смысле. Если при $\pm\infty$ для оператора $L$ имеет место случай предельной точки, то решение задачи вообще однозначно определяется уравнением. При этом, конечно, подразумевается, что задача на интервале $(-\infty, \infty)$ — предельная в отношении задачи на конечном интервале $[x_1, x_2]$ с вещественными граничными условиями:

$$Lv = -(pv)' + qv = lv, \quad x \in (x_1, x_2), \tag{75}$$

$$v(x_1)\cos\alpha - p(x_1)v'(x_1)\sin\alpha = 0; \quad v(x_2)\cos\beta + p(x_2)v'(x_2)\sin\beta = 0. \tag{76}$$

Пусть $a$ — вещественное число, такое, что $x_1 < a < x_2$ и $\psi_1(x, l)$, $\psi_2(x, l)$ — два линейно независимых решения уравнения (75), удовлетворяющих *начальным* условиям:

$$\begin{aligned} \psi_1(a, l) &= 1, \quad p(a)\psi_1'(a, l) = 0, \\ \psi_2(a, l) &= 0, \quad p(a)\psi_2'(a, l) = 1. \end{aligned} \tag{77}$$

Каждое решение уравнения второго порядка является линейной комбинацией двух его любых линейно независимых решений. Поэтому нормированная собственная функция $v_j(x)$ задачи (75)—(76), принадлежащая собственному числу $\lambda_j$, может быть представлена в виде

$$v_j(x)=c_{j1}\psi_1(x,\ \lambda_j)+c_{j2}\psi_2(x,\ \lambda_j),$$

где $c_{j1}$, $c_{j2}$ — постоянные коэффициенты. Положим, по аналогии с (65),

$$\bar{g}_1(l)=\int_{x_1}^{x_2}\overset{*}{\psi}_1(x,\ l)\,g(x)\,dx,\quad \bar{g}_2(l)=\int_{x_1}^{x_2}\overset{*}{\psi}_2(x,\ l)\,g(x)\,dx, \tag{78}$$

где $g(x)$ — функция с интегрируемым квадратом модуля на $[x_1,\ x_2]$. Ряд Фурье функции $g(x)$ имеет вид

$$g(x)=\sum_{\alpha=0}^{\infty}v_\alpha(x)\int_{x_1}^{x_2}v_\alpha(\xi)\,g(\xi)\,d\xi=\sum_{\alpha=0}^{\infty}\sum_{\beta,\ \gamma=1}^{2}c_{\alpha\beta}\psi_\beta(x,\ \lambda_\alpha)\times$$

$$\times\int_{x_1}^{x_2}c_{\alpha\gamma}\psi_\gamma(\xi,\ \lambda_\alpha)\,g(\xi)\,d\xi=\sum_{\alpha=0}^{\infty}\sum_{\beta,\ \gamma=1}^{2}c_{\alpha\beta}c_{\alpha\gamma}g_\gamma(\lambda_\alpha)\,\psi_\beta(x,\ \lambda_\alpha).$$

Чтобы ряд в правой части записать в форме интегралов, введем *четыре* функции скачков $\sigma_{jk}(\lambda)$, $j,\ k=1,\ 2,\ \ldots$, имеющие скачки, соответственно равные $c_{\alpha j}$, $c_{\alpha k}$ при значениях $\lambda$, принадлежащих последовательности собственных чисел задачи (75)—(76). Тогда

$$g(x)=\sum_{\beta,\ \gamma=1}^{2}\int_{x_1}^{x_2}\bar{g}_\gamma(\lambda)\,\psi_\beta(x,\ \lambda)\,d\sigma_{\beta\gamma}(\lambda). \tag{79}$$

Четыре функции скачков $\sigma_{jk}(\lambda)$ можно рассматривать как элементы матрицы

$$\boldsymbol{\sigma}(\lambda)=\begin{pmatrix}\sigma_{11}(\lambda) & \sigma_{12}(\lambda)\\ \sigma_{21}(\lambda) & \sigma_{22}(\lambda)\end{pmatrix},$$

которую называют *спектральной матрицей*.

Пусть $u=\psi_1-\tilde{m}\psi_2$ и $v=\psi_1+m\psi_2$ — решения уравнения (75), удовлетворяющие соответственно первому и второму граничному условию (76). Согласно (43) при $\operatorname{Im}l\neq0$ числа $-\tilde{m}$ и $m$ лежат на окружностях $m(l;\ x_1,\ -\alpha)$ и $m(l;\ x_2,\ \beta)$, определяемых соответственно уравнениями $W(u_1,\ \overset{*}{u}_1)=0$, $W(u_2,\ \overset{*}{u}_2)=0$. При $x_1\to-\infty$, $\operatorname{Im}l\neq0$, окружность $m(l;\ x_1,\ -\alpha)$ стремится либо к предельной точке, которую обозначим символом $-m_{-\infty}(l)$, либо к предельной окружности $-m_{-\infty}(l,\ c)$, где $c$ — параметр, при изменении которого в некоторых пределах величина $-m_{-\infty}(l;\ c)$ описывает (при фиксированном $l$) предельную окружность. Аналогично при $x_2\to\infty$, $\operatorname{Im}l\neq0$, окружность $m(l;\ x_2,\ \beta)$ стремится либо к предельной точке $m_\infty(l)$, либо к предельной окружности $m_\infty(l; c)$. Таким образом, на интервале $(-\infty, \infty)$ возможны комбинации либо двух предельных точек, либо двух предельных окружностей, либо, наконец, одному из концов интервала может соответствовать предельная точка, а другому — предельная окружность.

Независимо от свойств оператора $L$ функции $u=\psi_1-m_{-\infty}\psi_2$ и $v=\psi_1+m_\infty\psi_2$ принадлежат соответственно классам $\mathscr{L}^2(-\infty, a)$ и $\mathscr{L}^2(a, \infty)$.

Сформулируем теорему разложения для интервала $(-\infty, \infty)$. *Если $g(x)\in\mathscr{L}^2(-\infty, \infty)$, то существуют функции*

$$\bar{g}_1(\lambda)=\int_{-\infty}^{\infty}\psi_1(x, \lambda)g(x)\,dx, \quad \bar{g}_2(\lambda)=\int_{-\infty}^{\infty}\psi_2(x, \lambda)g(x)\,dx \tag{80}$$

*и неубывающие функции $\sigma_{11}(\lambda)$, $\sigma_{12}(\lambda)=\sigma_{21}(\lambda)$, $\sigma_{22}(\lambda)$, такие, что*

$$g(x)=\int_{-\infty}^{\infty}\psi_1(x, \lambda)\bar{g}_1(\lambda)\,d\sigma_{11}(\lambda)+\int_{-\infty}^{\infty}[\psi_1(x, \lambda)\bar{g}_2(\lambda)+$$

$$+\psi_2(x, \lambda)\bar{g}_1(\lambda)]\,d\sigma_{12}+\int_{-\infty}^{\infty}\psi_2(x, \lambda)\bar{g}_2(\lambda)\,d\sigma_{22}(\lambda). \tag{81}$$

*Если в точках $\lambda'$ и $\lambda$ функция $\sigma_{jk}(\lambda)$ непрерывна, то*

$$\sigma_{jk}(\lambda)-\sigma_{jk}(\lambda')=\frac{1}{\pi}\lim_{\varepsilon\to+0}\int_{\lambda'}^{\lambda}\operatorname{Im}M_{jk}(\eta+i\varepsilon)\,d\eta, \quad j,\ k=1,\ 2, \tag{82}$$

*где*

$$M_{11}=-\frac{1}{m_{-\infty}+m_\infty}, \quad M_{12}=M_{21}=\frac{m_{-\infty}-m_\infty}{2(m_{-\infty}+m_\infty)}, \tag{83}$$

$$M_{22}=\frac{m_{-\infty}m_\infty}{m_{-\infty}+m_\infty}.$$

*Если при $\pm\infty$ имеет место случай предельного круга*, то все *$M_{jk}$ — функции, аналитические в любой конечной части комплексной плоскости $l$ всюду, за исключением особых точек, являющихся полюсами.*

Из (83) следует, что полюсы функций $M_{jk}$, т. е. разрывы $\sigma_{jk}$, возможны только в точках, в которых выполняется одно из условий

$$m_{-\infty}+m_\infty=0, \quad \frac{1}{m_{-\infty}}+\frac{1}{m_\infty}=0. \tag{84}$$

Может случиться (например, когда $m_\infty=-m_\infty$ или функции $m_\infty$, $m_{-\infty}$ не имеют общих полюсов и одна из них вещественна на вещественной оси), что разложение (81) приводится к виду, аналогичному (72). Так, если полюсы функций $m_\infty$, $m_{-\infty}$ не совпадают (вследствие чего величины $M_{jk}$ в этих полюсах ограничены) и под знаком интеграла (82) в выражении $\operatorname{Im} m_{-\infty}(\eta+i\varepsilon)$ можно перейти к пределу $\varepsilon=0$, причем $\operatorname{Im} m_{-\infty}(\eta)=0$, то

$$\operatorname{Im} M_{11}=\frac{\operatorname{Im} m_\infty}{|m_{-\infty}+m_\infty|}; \quad \operatorname{Im} M_{12}=-m_{-\infty}\frac{\operatorname{Im} m_\infty}{2|m_{-\infty}+m_\infty|}; \tag{85}$$

$$\operatorname{Im} M_{22}=m_{-\infty}^2\frac{\operatorname{Im} m_\infty}{|m_{-\infty}+m_\infty|^2},$$

откуда

$$d\sigma_{12}=-m_{-\infty}d\sigma_{11}, \quad d\sigma_{22}=m_{-\infty}^2 d\sigma_{11}. \tag{86}$$

Подставив эти значения в (81), получим

$$g(x)=\int_{-\infty}^{\infty}(\psi_1-m_{-\infty}\psi_2)(\bar{g}_1-m_{-\infty}\bar{g}_2)\,d\sigma_{11},$$

а подставив сюда (80) и обозначив, как и выше, $\psi_1-m_{-\infty}\psi_2=u$, придем к разложению

$$g(x)=\int_{-\infty}^{\infty}u(x,\lambda)\,d\sigma_{11}(\lambda)\int_{-\infty}^{\infty}u(\xi,\lambda)\,g(\xi)\,d\xi. \tag{87}$$

## § 10. Разложение по бесселевым функциям

1. В качестве примера применения изложенной выше теории рассмотрим разложения по функциям Бесселя.

Уравнение Бесселя

$$(xy')'+\left(s^2-\frac{\nu^2}{x^2}\right)xy=0 \tag{88}$$

с помощью подстановок: $v=\sqrt{x}y$ и $s^2=l$ приводится к виду (60)

$$-v''+\left(\nu^2-\frac{1}{4}\right)\frac{1}{x^2}v=lv \tag{89}$$

с $p=1$, $q=\left(\nu^2-\frac{1}{4}\right)\frac{1}{x^2}$, $l=s^2$. Линейно независимыми решениями уравнения (89) являются выражения $\sqrt{x}J_\nu(sx)$ и $\sqrt{x}Y_\nu(sx)$, где $J_\nu(z)$ и $Y_\nu(z)$—функции Бесселя и Вебера (гл. XIII, § 1). Коэффициент $q$ имеет особенность при $x=0$.

Выведем несколько формул, которые понадобятся в дальнейшем.

Пусть $Z_\nu^{(1)}(z)$ и $Z_\nu^{(2)}(z)$, $z=sx$—два решения уравнения Бесселя (88). В силу тождества Лагранжа (5)

$$Z_\nu^{(1)}(z)\,Z_\nu^{(2)\prime}(z)-Z_\nu^{(1)\prime}(z)\,Z_\nu^{(2)}(z)=\frac{c}{z},$$