падают (вследствие чего величины M_{jk} в этих полюсах ограничены) и под знаком интеграла (82) в выражении $\operatorname{Im} m_{-\infty}(\eta+i\varepsilon)$ можно перейти к пределу $\varepsilon=0$, причем $\operatorname{Im} m_{-\infty}(\eta)=0$, то

$$\operatorname{Im} M_{11}=\frac{\operatorname{Im} m_\infty}{|m_{-\infty}+m_\infty|}; \quad \operatorname{Im} M_{12}=-m_{-\infty}\frac{\operatorname{Im} m_\infty}{2|m_{-\infty}+m_\infty|}; \tag{85}$$

$$\operatorname{Im} M_{22}=m_{-\infty}^2\frac{\operatorname{Im} m_\infty}{|m_{-\infty}+m_\infty|^2},$$

откуда

$$d\sigma_{12}=-m_{-\infty}d\sigma_{11}, \quad d\sigma_{22}=m_{-\infty}^2 d\sigma_{11}. \tag{86}$$

Подставив эти значения в (81), получим

$$g(x)=\int_{-\infty}^{\infty}(\psi_1-m_{-\infty}\psi_2)(\bar{g}_1-m_{-\infty}\bar{g}_2)\,d\sigma_{11},$$

а подставив сюда (80) и обозначив, как и выше, $\psi_1-m_{-\infty}\psi_2=u$, придем к разложению

$$g(x)=\int_{-\infty}^{\infty}u(x,\lambda)\,d\sigma_{11}(\lambda)\int_{-\infty}^{\infty}u(\xi,\lambda)\,g(\xi)\,d\xi. \tag{87}$$

§ 10. Разложение по бесселевым функциям

1. В качестве примера применения изложенной выше теории рассмотрим разложения по функциям Бесселя.

Уравнение Бесселя

$$(xy')'+\left(s^2-\frac{\nu^2}{x^2}\right)xy=0 \tag{88}$$

с помощью подстановок: $v=\sqrt{x}y$ и $s^2=l$ приводится к виду (60)

$$-v''+\left(\nu^2-\frac{1}{4}\right)\frac{1}{x^2}v=lv \tag{89}$$

с $p=1$, $q=\left(\nu^2-\frac{1}{4}\right)\frac{1}{x^2}$, $l=s^2$. Линейно независимыми решениями уравнения (89) являются выражения $\sqrt{x}J_\nu(sx)$ и $\sqrt{x}Y_\nu(sx)$, где $J_\nu(z)$ и $Y_\nu(z)$—функции Бесселя и Вебера (гл. XIII, § 1). Коэффициент q имеет особенность при $x=0$.

Выведем несколько формул, которые понадобятся в дальнейшем.

Пусть $Z_\nu^{(1)}(z)$ и $Z_\nu^{(2)}(z)$, $z=sx$—два решения уравнения Бесселя (88). В силу тождества Лагранжа (5)

$$Z_\nu^{(1)}(z)\,Z_\nu^{(2)\prime}(z)-Z_\nu^{(1)\prime}(z)\,Z_\nu^{(2)}(z)=\frac{c}{z},$$

где c — постоянная. Чтобы вычислить ее, воспользуемся формулами (14), (15) гл. XIII и положим

$$Z_\nu^{(1)}(z) = J_{-\nu}(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^{-\nu} \frac{1}{\Gamma(1-\nu)}(1+\ldots),$$

$$Z_\nu^{(2)}(z) = J_\nu(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^{\nu} \frac{1}{\Gamma(1+\nu)}(1+\ldots),$$

что даст

$$J_{-\nu}(z)\, J'_\nu(z) - J'_{-\nu}(z)\, J_\nu(z) = \frac{2\nu}{z\Gamma(1+\nu)\,\Gamma(1-\nu)}(1+\ldots).$$

Многоточием обозначены члены, образующие степенные ряды по z. Поскольку правая часть должна иметь вид $\frac{c}{z}$, эти ряды тождественно равны нулю. Используя равенства $\Gamma(1+\nu) = \nu\Gamma(\nu)$ и $\Gamma(\nu)\,\Gamma(1-\nu) = \frac{\pi}{\sin \nu\pi}$, получим

$$J_{-\nu}(z)\, J'_\nu(z) - J'_{-\nu}(z)\, J_\nu(z) = \frac{2\sin\nu\pi}{\pi z}. \tag{90}$$

Опираясь на это тождество и используя формулы (17) и (62) гл. XIII, найдем тождества:

$$J_\nu(z)\, Y'_\nu(z) - J'_\nu(z) Y_\nu(z) = \frac{2}{\pi z}, \tag{91}$$

$$J_\nu(z)\, H_\nu^{(1)\prime}(z) - J'_\nu(z)\, H_\nu^{(1)}(z) = \frac{2i}{\pi z}, \tag{92}$$

$$Y_\nu(z)\, H_\nu^{(1)\prime}(z) - Y_\nu(z) H_\nu^{(1)}(z) = -\frac{2}{\pi z}. \tag{93}$$

2. Сначала рассмотрим интервал $[a, \infty)$, где $a > 0$. В точке a коэффициенты уравнения (89) не имеют особенностей и применимы формулы § 7. Найдем разложение по собственным функциям задачи вида (62)—(63) с коэффициентами, соответствующими (89). Для простоты в (63) примем $\alpha = \frac{\pi}{2}$ или, что то же, $v(a) = 0$.

а) Найдем решения $\chi(x, l)$, $\psi(x, l)$ уравнения (89), удовлетворяющие начальным условиям (37)—(38) при $\alpha = \frac{\pi}{2}$, т. е. условиям

$$\chi(a, l) = \psi'(a, l) = 1, \quad \chi'(a, l) = \psi(a, l) = 0. \tag{94}$$

Из (94) и (91) следует, что функции χ и ψ выражаются через функции $\sqrt{x}J_\nu(sx)$ и $\sqrt{x}Y_\nu(sx)$ соотношениями ($s = \sqrt{l}$):

$$\psi(x, l) = -\frac{\pi}{2}\sqrt{ax}\,[J_\nu(sx) Y_\nu(sa) - J_\nu(sa) Y_\nu(sx)], \tag{95}$$

$$\chi(x, l) = \frac{\pi}{2} s\sqrt{ax}\,[J_\nu(sx)\, Y'_\nu(sa) - J'_\nu(sa) Y_\nu(sx)]. \tag{96}$$

б) Вычислим функцию $m_\infty(l)$. Из (64) гл. XIII следует, что при $\operatorname{Im} l > 0$ одно из линейно независимых решений уравнения (89), именно $\sqrt{x}\,H_\nu^{(2)}(sx)$, неограниченно растет при $x \to \infty$. Поэтому для уравнения (89) при $+\infty$ имеет место случай предельной точки, а тогда для вычисления $m_\infty(l)$ можно применить следующий прием. Согласно (54) решение $v = \chi + m_\infty \psi$ принадлежит $\mathscr{L}^2(a, \infty)$. Так как в случае предельной точки линейно независимое решение класса $\mathscr{L}^2(a, \infty)$ может быть только одно, а ввиду (64) гл. XIII им является $\sqrt{x}\,H_\nu^{(1)}(sx)$, то v может отличаться от $\sqrt{x}\,H_\nu^{(1)}(sx)$ только постоянным множителем, т. е.

$$\chi(x, l) + m_\infty(l)\,\psi(x, l) = A\sqrt{x}\,H_\nu^{(1)}(sx) = A\sqrt{x}\,[J_\nu(sx) + iY_\nu(sx)],\quad s = \sqrt{l}, \tag{97}$$

где A — постоянная. Подставив χ и ψ из (95)—(96) и приравняв коэффициенты при $J_\nu(sx)$ и $Y_\nu(sx)$, получим

$$m_\infty(l) = s\,\frac{H_\nu^{(1)\prime}(sa)}{H_\nu^{(1)}(sa)} + \frac{1}{2a}, \quad s = \sqrt{l}. \tag{98}$$

С помощью (14)—(17) и (61) гл. XIII легко убедиться, что $m_\infty(l)$ — четная функция $\sqrt{l}$, т. е. не зависит от выбора знака $\sqrt{l}$. Следовательно, $m_\infty(l)$ — однозначная функция $s = \sqrt{l}$. Ниже принято $s = \sqrt{l}$, где значение $\sqrt{l}$ берется *с неотрицательной вещественной частью.*

в) Перейдем к вычислению спектральной функции $\sigma(\lambda)$. Ввиду (98)

$$\operatorname{Im} m_\infty(l) = \operatorname{Im}\left[s\,\frac{H_\nu^{(1)\prime}(sa)}{H_\nu^{(1)}(sa)}\right] = \operatorname{Im}\left[s\,\frac{J_\nu'(sa) + iY_\nu'(sa)}{J_\nu(sa) + iY_\nu(sa)}\right]. \tag{99}$$

Умножим числитель и знаменатель выражения в квадратных скобках в правой части (99) на $J_\nu(sa) - iY_\nu(sa)$. Так как функции $J_\nu(z)$ и $Y_\nu(z)$ принимают вещественные значения при вещественных значениях z, то, приняв во внимание (91), при $\lambda \geqslant 0$, получим

$$\operatorname{Im} m_\infty(\lambda) = \frac{2}{\pi a}\,\frac{1}{J_\nu^2(sa) + Y_\nu^2(sa)}, \quad s,\ \lambda \geqslant 0,\ s = \sqrt{l}. \tag{100}$$

Знаменатель выражения в правой части в нуль не обращается, так как нули функций $J_\nu(z)$ и $Y_\nu(z)$ перемежаются. Следовательно, на полуоси $\lambda \geqslant 0$ функция $\operatorname{Im} m_\infty(\lambda)$ особенностей не имеет и в (72) при $\lambda, \lambda' > 0$ можно совершить предельный переход под знаком интеграла. Отсюда ясно, что при $\lambda > 0$ спектральная функция $\sigma(\lambda)$ непрерывна.

При $\lambda < 0$ аргумент $sa = \sqrt{\lambda} a$ чисто мнимый. Используя равенство

$$H_\nu^{(1)}(z) = \frac{2}{\pi i} e^{-\frac{\pi\nu}{2} i} K_\nu\left(\frac{z}{i}\right),$$

где $K_\nu(z)$ — функция Макдональда, преобразуем соотношение (99) к виду

$$\operatorname{Im} m_\infty(\lambda) = \operatorname{Im}\left[\sqrt{|\lambda|} \frac{K_\nu'(\sqrt{|\lambda|} a)}{K_\nu(\sqrt{|\lambda|} a)}\right], \quad \lambda < 0.$$

Функция Макдональда $K_\nu(z)$ вещественна и положительна при вещественных положительных z. Поэтому функция, стоящая за символом Im в правой части последнего соотношения, вещественна и не имеет особенностей Ввиду этого в (72) можно перейти к пределу под знаком интеграла. При этом подынтегральное выражение обратится в нуль и, значит, $\sigma(\lambda) = 0$ при $\lambda < 0$.

Поскольку $\operatorname{Im} m_\infty(l)$ не имеет особенностей на вещественной оси, то можно использовать (74), что даст

$$d\sigma(\lambda) = \frac{4}{\pi^2 a} \frac{s\,ds}{J_\nu^2(sa) + Y_\nu^2(sa)}, \quad \lambda = s^2 > 0.$$

Подставив значения ψ и $d\sigma(\lambda)$ в (72), для $g(x) \in \mathscr{L}^2(a, \infty)$ получим разложение

$$g(x) = \sqrt{x} \int_0^\infty \frac{J_\nu(sx) Y_\nu(sa) - J_\nu(sa) Y_\nu(sx)}{J_\nu^2(sa) + Y_\nu^2(sa)} s\,ds \int_a^\infty \sqrt{\xi} \times$$
$$\times [J_\nu(s\xi) Y_\nu(sa) - J_\nu(sa) Y_\nu(s\xi)]\, g(\xi)\, d\xi. \qquad (101)$$

3. Перейдем к разложениям на интервале $(0, a]$. В точке $x = 0$ один из коэффициентов уравнения (88) имеет неинтегрируемую особенность. Как указывалось, сингулярная задача с неинтегрируемой особенностью аналогична задаче без особенностей в коэффициентах уравнения, но с бесконечным интервалом изменения x в одном из направлений. Поэтому граничное условие следует задать в точке $x = a$. Примем его тем же, что и выше, т. е. $v(a) = 0$. Тогда для функций χ и ψ справедливы формулы (95), (96).

а) Пусть сначала $\nu \geqslant 1$. Ввиду (15) и (16) гл. XIII при $x \to 0$ и $\nu \geqslant 1$ решение $\sqrt{x} Y_\nu(sx)$ уравнения (88) не принадлежит классу $\mathscr{L}^2(0, a)$ и, следовательно, имеет место случай предельной точки. Для вычисления функции $m_\infty(l)$ применим тот же прием, что и выше. Решение $v = \chi - m_{-\infty}\psi$ принадлежит классу $\mathscr{L}^2(0, a)$ (см. § 6), поэтому

$$\chi(x, l) - m_{-\infty}\psi(x, l) = A\sqrt{x} J_\nu(sx), \quad s = \sqrt{l},$$

где A — постоянная. Подставив сюда выражения функций χ и ψ и приравняв множитель при функции $Y_\nu(sx)$ нулю, получим

$$m_{-\infty}(l) = -s\frac{J'_\nu(sa)}{J_\nu(sa)} - \frac{1}{2a}, \qquad s = \sqrt{l}. \tag{102}$$

Используя (14) гл. XIII, легко убедиться, что $m_{-\infty}(l)$ — четная и, следовательно, однозначная функция $s = \sqrt{l}$. Как и раньше, под s будем понимать значение $\sqrt{l}$ с положительной вещественной частью. При $l = \lambda > 0$ мнимая часть $m_{-\infty}(l)$ равна нулю, так как функция Бесселя вещественна при вещественных значениях аргумента. При $l = \lambda < 0$, используя (66) гл. XIII, найдем, что

$$J_\nu(i\sqrt{|\lambda|}a) = i^\nu J_\nu(\sqrt{|\lambda|}a), \;\; J'_\nu(i\sqrt{|\lambda|}a) = i^{\nu+1}J'_\nu(\sqrt{|\lambda|}a),$$

где функция $J_\nu(\sqrt{|\lambda|}a)$ вещественна при вещественных значениях аргумента (гл. XIII, § 7). Подставив эти выражения в (102), убедимся, что $\operatorname{Im} m_\infty(\lambda) = 0$ также и при $\lambda < 0$. Таким образом, функция $\operatorname{Im} m_\infty(l)$ вещественна при вещественных l и, следовательно, точки непрерывности функции $\operatorname{Im} m_\infty(l)$ на вещественной оси не вносят вклада в спектральную функцию.

Полюсы $m_{-\infty}(l)$ совпадают с нулями знаменателя первого члена правой части (102), т. е. с корнями λ_j уравнения

$$J_\nu(\sqrt{\lambda}a) = 0. \tag{103}$$

Вблизи нуля λ_j:

$$J_\nu(\sqrt{l}a) = (l-\lambda_j)\left[\frac{d}{dl}J_\nu(\sqrt{l}a)\right]_{l=\lambda_j} + \ldots = (l-\lambda_j)\frac{a}{2\sqrt{\lambda_j}} \times$$
$$\times J'_\nu(\sqrt{\lambda_j}a) + \ldots, \quad \operatorname{Im} m_{-\infty}(l) = -\operatorname{Im}\frac{2\lambda_j}{a}\frac{1}{l-\lambda_j} + \ldots =$$
$$= \frac{2\lambda_j}{a}\frac{\varepsilon}{(\eta-\lambda_j)^2+\varepsilon^2} + \ldots,$$

где $\eta + i\varepsilon = l$, а многоточием обозначены члены, которые при l, близком к λ_j, имеют меньший порядок малости, чем написанные. Подставив это выражение в (73) (где $m_\infty(l)$ заменено на $m_{-\infty}(l)$) и заметив, что при малом $\delta > 0$

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\int\limits_{\lambda_j-\delta}^{\lambda_j+\delta}\frac{\varepsilon}{(\eta-\lambda_j)^2+\varepsilon^2}d\eta = \lim_{\varepsilon\to+0}\int\limits_{-\delta}^{\delta}\frac{\varepsilon}{\xi^2+\varepsilon^2}d\xi =$$
$$= \lim_{\varepsilon\to+0}\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{\delta}{\varepsilon} - \operatorname{arc\,tg}\frac{-\delta}{\varepsilon}\right) = \pi,$$

найдем скачок спектральной функции в точке λ_j:

$$c_j = \sigma(\lambda_j+0) - \sigma(\lambda_j-0) = \frac{2\lambda_j}{a}. \tag{104}$$

В разложение (71) войдут значения функций $\psi(x, l)$ только в точках λ_j, где при рассматриваемом граничном условии

$$\psi(x, l)=\psi(x, \lambda_j)=-\frac{\pi}{2}\sqrt{ax}\,Y_\nu(s_ja)\,J_\nu(s_ja), \quad s_j=\sqrt{\lambda_j}.$$

В силу (91) и (103),

$$Y_\nu(s_ja)=-\frac{2}{\pi s_ja}\frac{1}{J'_\nu(s_ja)},$$

так что

$$\psi(x, \lambda_j)=\sqrt{\frac{x}{a}}\,\frac{J_\nu(s_ja)}{s_jJ'_\nu(s_ja)}.$$

Подставив полученные соотношения в (70)—(71) и имея в виду, что интеграл по спектральной функции в рассматриваемом случае в соответствии с (59) и (104) сводится к сумме, после простых выкладок получим:

$$g(x)=\sum_{\alpha=1}^{\infty}A_\alpha\sqrt{x}\,J_\nu(s_\alpha x), \quad \nu\geqslant 1, \tag{105}$$

$$A_\alpha=\frac{2}{a^2}\frac{1}{\left[J'_\nu(s_ja)\right]^2}\int_0^a\sqrt{x}\,J_\nu(s_jx)\,g(x)\,dx, \tag{106}$$

$$J_\nu(s_ja)=0, \tag{107}$$

где $g(x)$ — любая функция класса $\mathscr{L}^2(0, \alpha)$.

б) Пусть теперь $0<\nu<1$. Тогда все решения уравнения (83) принадлежат $\mathscr{L}^2(0, a)$ и имеет место случай предельной окружности. При нецелом ν, ввиду (17) гл. XIII, выражения (95) и (96) могут быть записаны в виде:

$$\psi(x, l)=\frac{\pi}{2}\frac{\sqrt{ax}}{\sin\nu\pi}\left[J_\nu(sx)J_{-\nu}(sa)-J_\nu(sa)\,J_{-\nu}(sx)\right], \quad s=\sqrt{l}, \tag{108}$$

$$\chi(x, l)=\frac{\pi}{2}\frac{s\sqrt{ax}}{\sin\nu\pi}\left[J_\nu(sx)\,J'_{-\nu}(sa)-J'_\nu(sa)\,J_{-\nu}(sx)\right]-$$
$$-\frac{1}{2a}\psi(x, l), \quad s=\sqrt{l}. \tag{109}$$

Функция $-m_{-\infty}(l; c)$ является пределом выражения (46), когда величины b, β пробегают некоторую бесконечную последовательность b_1, β_1; b_2, β_2; ..., где $b_j\to 0$ при $j\to\infty$. Чтобы вычислить этот предел, заметим, что, ввиду (14) гл. XIII, при малых значениях sx

$$J_\nu(sx)=\frac{(sx)^\nu}{2^\nu\Gamma(\nu+1)}+O\left((sx)^{\nu+2}\right). \tag{110}$$

(Напомним, что символ $O(z)$ означает выражение того же порядка малости, что и z.) Малые члены, не влияющие на значение предела, для сокращения письма ниже обозначим многоточием.

В силу (110) и (108),

$$\psi(x,\ l)=\frac{\pi\sqrt{a}}{2\sin\nu\pi}\left[\frac{s^{\nu}J_{-\nu}(sa)}{2^{\nu}\Gamma(\nu+1)}x^{\nu+\frac{1}{2}}-\frac{s^{-\nu}J_{\nu}(sa)}{2^{-\nu}\Gamma(-\nu+1)}x^{-\nu+\frac{1}{2}}\right]+\ldots,$$

откуда

$$\psi'(x,\ l)=\frac{\pi\sqrt{a}}{2\sin\nu\pi}\left[\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\frac{s^{\nu}J_{-\nu}(sa)}{2^{\nu}\Gamma(\nu+1)}x^{\nu-\frac{1}{2}}-\right.$$

$$\left.-\left(-\nu+\frac{1}{2}\right)\frac{s^{-\nu}J_{\nu}(sa)}{2^{-\nu}\Gamma(-\nu+1)}x^{-\nu-\frac{1}{2}}\right]+\ldots,$$

$$\psi(b_j,\ l)\operatorname{ctg}\beta_j+\psi'(b_j,\ l)=\frac{\pi\sqrt{a}}{2\sin\nu\pi}\frac{\left(\nu+\frac{1}{2}\right)b^{\nu-\frac{1}{2}}}{2^{\nu}\Gamma(\nu+1)}\times$$

$$\times\left\{-\frac{2^{\nu}\Gamma(\nu+1)}{2^{-\nu}\Gamma(-\nu+1)\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}\left[b_j^{-2\nu+1}\operatorname{ctg}\beta_j+\left(-\nu+\frac{1}{2}\right)b_j^{-2\nu}\right]\times\right.$$

$$\left.\times\ s^{-\nu}J_{\nu}(sa)+s^{\nu}J_{-\nu}\,sa\right\}+\ldots\ .$$

Выражение для $\chi(b_j,\ l)\operatorname{ctg}\beta_j+\chi'(b_j,\ l)$ с точностью до члена $-\frac{1}{2a}\psi(x,\ l)$ получается отсюда заменой множителей $J_{\nu}(sa)$ и $J_{-\nu}(sa)$ соответственно на $-sJ'_{\nu}(sa)$ и $-sJ'_{-\nu}(sa)$. В зависимости от выбора последовательности b_1, β_1; b_2, β_2; ... выражение $b_j^{-2\nu+1}\operatorname{ctg}\beta_j+\left(-\nu+\frac{1}{2}\right)b_j^{-2\nu}$ при фиксированном $s=\sqrt{l}$ и $j\to\infty$ может стремиться к любому вещественному числу или $\pm\infty$. Обозначив символом c предел этого выражения, умноженный на $\frac{2^{\nu}\Gamma(\nu+1)}{2^{-\nu}\Gamma(-\nu+1)\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}$, получим

$$m_{-\infty}(l;\ c)=-s\frac{s^{2\nu}J'_{-\nu}(sa)-cJ'_{\nu}(sa)}{s^{2\nu}J_{-\nu}(sa)-cJ_{\nu}(sa)}-\frac{1}{2a},\quad s=\sqrt{l}. \tag{111}$$

При изменении c от $-\infty$ до ∞ и фиксированном l точка $m_{-\infty}(l;\ c)$ описывает на комплексной плоскости предельную окружность. Функция $m_{-\infty}(l;\ c)$ — четная функция $\sqrt{l}$, т. е. не зависит от выбора знака $\sqrt{l}$. Следовательно, она — однозначная функция l. На вещественной оси эта функция вещественна, т. е. $\operatorname{Im} m_{-\infty}(\lambda)=0$, $\lambda=\mathrm{Re}$. Поэтому точками роста спектральной функции $\sigma(\lambda)$ могут быть только полюсы функции $m_{-\infty}(l;\ c)$. Они совпадают с нулями λ_j ее знаменателя, являющимися корнями уравнения

$$\lambda^{\nu} J_{-\nu}(\sqrt{\lambda} a) - c J_{\nu}(\sqrt{\lambda} a) = 0. \tag{112}$$

Скачок c_j спектральной функции $\sigma(\lambda)$ в точке $\lambda = \lambda_j$ равен вычету функции $-m_{-\infty}(l; c)$ в этой точке. Простые вычисления дадут:

$$c_j = \frac{2\lambda_j}{a} \frac{1}{1 + c \dfrac{\nu}{\sqrt{\lambda_j}} \dfrac{J_{\nu}(\sqrt{\lambda_j} a)}{\lambda_j^{\nu} J'_{-\nu}(\sqrt{\lambda_j} a) - c J'_{\nu}(\sqrt{\lambda_j} a)}}. \tag{113}$$

Заменив в (70) пределы a, ∞ интегрирования по x на пределы 0, a и подставив в (108), получим $(s_j^2 = \lambda_j)$:

$$\bar{g}(s_j^2) = \frac{\pi\sqrt{a}}{2\sin\nu\pi} \int_0^a \sqrt{x}\,[J_{\nu}(s_j x) J_{-\nu}(s_j a) - J_{\nu}(s_j a) J_{-\nu}(s_j x)]\, g(x)\, dx,$$

где $g(x) \in \mathscr{L}^2(0, a)$. Подставив найденные величины в (71), придем к разложению

$$g(x) = \sum_{\alpha=1}^{\infty} A_{\alpha} \sqrt{x}\,[J_{\nu}(s_{\alpha} x) J_{-\nu}(s_{\alpha} a) - J_{\nu}(s_{\alpha} a) J_{-\nu}(s_{\alpha} x)];$$

$$A_{\alpha} = \frac{\pi\sqrt{a}}{2\sin\nu\pi} c_{\alpha} \bar{g}(s_{\alpha}^2). \tag{114}$$

Приняв во внимание (112) и (113), легко видеть, что при $c = \infty$ этот ряд переходит в ряд по функциям Бесселя порядка ν, а при $c = 0$ — в ряд по функциям Бесселя порядка $-\nu$.

в) Обратимся, наконец, к случаю $\nu = 0$. В силу (19) гл. XIII при малых sx

$$Y_0(sx) = \frac{2}{\pi}\left(C + \ln\frac{sx}{2}\right)\{1 + O[(sx^2)]\},$$

где C — постоянная Эйлера. Согласно (95) и (14) гл. XIII при малых значениях sx:

$$\psi(x, l) = -\frac{\pi}{2}\sqrt{a}\left[Y_0(sa)\sqrt{x} - J_0(sa)\frac{2}{\pi}\sqrt{x}\left(C + \ln\frac{sx}{2}\right)\right] + \ldots,$$

$$\psi'(x, l) = -\frac{\pi}{2}\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{x}}\left[\frac{1}{2}Y_0(sa) - J_0(sa)\frac{1}{\pi}\left(C + 1 + \ln\frac{sx}{2}\right)\right] + \ldots,$$

откуда

$$\psi(b_j, l)\operatorname{ctg}\beta_j + \psi'(b_j, l) = -\frac{\pi}{2}\sqrt{a}\left\{\left[Y(sa) - \frac{2}{\pi}J_0(sa)\left(C + \ln\frac{sb_j}{2}\right)\right]\times\right.$$

$$\left.\times\left(\frac{1}{2\sqrt{b_j}} + \sqrt{b_j}\operatorname{ctg}\beta_j\right) - \frac{2}{\pi}\frac{1}{\sqrt{b_j}}J_0(sa)\right\} =$$

$$= -\frac{\pi}{2}\sqrt{a}\left\{\left[Y_0(sa) - \frac{2}{\pi}J_0(sa)\ln s\right]\left(\frac{1}{2\sqrt{b_j}} + \sqrt{b_j}\operatorname{ctg}\beta_j\right) -\right.$$

$$\left.-\frac{2}{\pi}J_0(sa)\left[\left(C + \ln\frac{b_j}{2}\right)\left(\frac{1}{2\sqrt{b_j}} + \sqrt{b_j}\operatorname{ctg}\beta_j\right) + \frac{1}{\sqrt{b_j}}\right\} =$$

$$= -\frac{\pi}{2}\sqrt{a}\left(\frac{1}{2\sqrt{b_j}} + b_j\operatorname{ctg}\beta_j\right)\left\{\left[Y_0(sa) - \frac{2}{\pi}J_0(sa)\ln s\right] -\right.$$

$$\left.-\frac{2}{\pi}J_0(sa)\,\frac{C + \ln\dfrac{b_j}{2}\left(\dfrac{1}{2\sqrt{b_j}} + \sqrt{b_j}\operatorname{ctg}\beta_j\right) + \dfrac{1}{\sqrt{b_j}}}{\dfrac{1}{2\sqrt{b_j}} + \sqrt{b_j}\operatorname{ctg}\beta_j}\right\}.$$

Чтобы получить выражение для $\chi(b_j, l)\operatorname{ctg}\beta_j + \chi'(b_j, l)$, здесь надо заменить $Y_0(sa)$ и $J_0(sa)$ на $-sY_0'(sa)$ и $-sJ_0'(sa)$ соответственно. В зависимости от выбора последовательности b_1, β_1; b_2, β_2; ... при $j \to \infty$ отношение

$$c = \frac{2}{\pi}\,\frac{\left(C + \ln\dfrac{b_j}{2}\right)\left(\dfrac{1}{2\sqrt{b_j}} + \sqrt{b_j}\operatorname{ctg}\beta_j\right) + \dfrac{1}{\sqrt{b_j}}}{\dfrac{1}{2\sqrt{b_j}} + \sqrt{b_j}\operatorname{ctg}\beta_j} \tag{115}$$

может стремиться к любому вещественному числу или $\pm\infty$. Функция $-m_{-\infty}(l; c)$ есть предел выражения (46). Подставив значения величин и перейдя к пределу при $j \to \infty$, $b_j \to 0$, получим

$$m_{-\infty}(l; c) = -s\,\frac{Y_0'(sa) - \dfrac{2}{\pi}J_0'(sa)\ln s - cJ_0'(sa)}{Y_0(sa) - \dfrac{2}{\pi}J_0(sa)\ln s - cJ_0(sa)}, \qquad s = \sqrt{l}. \tag{116}$$

При изменении c от $-\infty$ до ∞ точка $m_{-\infty}(l; c)$ описывает предельную окружность. Можно показать*, что, как и выше, функция $m_{-\infty}(l; c)$ не меняется при изменении знака $s = \sqrt{l}$ и, следовательно,— однозначная функция l. Разложение в ряд поэтому строится, как и выше. В частности, при $c = \infty$ получается разложение по функциям Бесселя нулевого порядка.

---

* Г. Н. Ватсон [14], п. 3.51, ф-ла (3).

4. Рассмотрим, наконец, разложение по функциям Бесселя на интервале $(0, \infty)$, когда оба конца интервала сингулярны.

Выберем некоторую точку $x=a>0$ в качестве «опорной точки». Она будет играть ту же роль, что точка $x=a$ в случае интервала $(-\infty, \infty)$. Именно, пусть ψ_1 и ψ_2 — решения уравнения $-v''+qv=lv$, удовлетворяющие начальным условиям:

$$\begin{aligned} \psi_1(a, l)&=1, \quad \psi_1'(a, l)=0, \\ \psi_2(a, l)&=0, \quad \psi_2'(a, l)=1. \end{aligned} \tag{117}$$

Тогда (§ 6) функции $u=\psi_1-m_{-\infty}\psi_2$ и $v=\psi_1+m_\infty\psi_2$ принадлежат соответственно классам $\mathscr{L}^2(0, a)$ и $\mathscr{L}^2(a, \infty)$. Начальные условия (117) совпадают с (95). Поэтому $\psi_1=\chi$, $\psi_2=\psi$ и можно непосредственно воспользоваться результатами, полученными выше.

а) Пусть $\nu>1$. При этом на обоих концах интервала имеет место случай предельной точки и функции $m_{-\infty}(l)$ и $m_\infty(l)$ могут быть определены из соотношений $u=A_1\sqrt{x}J_\nu(\sqrt{l}x)$ и $v=A_2\sqrt{x}H_\nu^{(1)}(\sqrt{l}\ x)$, где A_1 и A_2 — постоянные. Это было сделано выше и получены выражения (106) и (97). Выше было также показано, что функция $m_\infty(l)$ особенностей не имеет, а $m_{-\infty}(l)$ вещественна при вещественном значении аргумента. Поэтому соблюдены условия, при которых разложению может быть придан вид (87).

Используя (102), (98) и (92), получим

$$m_{-\infty}+m_\infty=\frac{2i}{\pi a}\,\frac{1}{J_\nu(sa)\,H_\nu^{(1)}(sa)}\,.$$

С помощью (61), (66) и (69) гл. XIII для мнимых значений s, т. е. для $\lambda<0$, этому выражению может быть придан вид

$$m_{-\infty}+m_\infty=-\frac{1}{I_\nu(|s|a)\,K_\nu(|s|a)}\,.$$

Заметив, что функции $I_\nu(z)$ и $K_\nu(z)$ вещественны при вещественных z, так что $\operatorname{Im}(m_{-\infty}+m_\infty)=0$ при $\lambda<0$, и используя (61) гл. XIII, получим

$$-\operatorname{Im}\frac{1}{m_{-\infty}+m_\infty}=\begin{cases} \dfrac{\pi a}{2}J_\nu^2(sa), & s, \lambda>0, \\ 0, & \lambda<0. \end{cases}$$

Так как это выражение непрерывно, то в (82) для $j=k=1$ можно перейти к пределу под знаком интеграла, после чего, взяв дифференциал от обеих частей, получим

$$d\sigma_{11}(\lambda)=\frac{a}{2}J_\nu^2(sa)\,d(s^2) \text{ при } \lambda>0; \ d\sigma(\lambda)=0 \quad \text{при} \quad \lambda<0.$$

Вычислив с помощью (95), (96) и (91) функцию

$$u=\psi_1-m_{-\infty}\psi_2=\chi-m_{-\infty}\psi=\sqrt{\frac{x}{a}}\,\frac{J_\nu(sx)}{J_\nu(sa)}$$

и подставив значения величин в (87), придем к разложению:

$$g(x)=\sqrt{x}\int_0^\infty J_\nu(sx)\,s\,dx\int_0^\infty \sqrt{\xi}\,J_\nu(s\xi)\,g(\xi)\,d\xi. \tag{118}$$

б) Перейдем к случаю $0<\nu<1$. Функции $m_{-\infty}(l;c)$ и $m_\infty(l)$ определяются теперь формулами (111) и (98). Функция $m_\infty(l)$ полюсов не имеет, а функция $m_{-\infty}(l;c)$ вещественна при вещественных значениях аргумента. Поэтому, как и при $\nu>1$, разложению может быть придан вид (87).

Заметив, что $H_{-\nu}^{(1)}(z)=i^{2\nu}H_\nu^{(1)}(z)$, и используя (111), (98) и (92), получим

$$m_{-\infty}+m_\infty=s\left[\frac{H_\nu^{(1)\prime}(sa)}{H_\nu^{(1)}(sa)}-\frac{s^{2\nu}J_{-\nu}(sa)-cJ_\nu(sa)}{s^{2\nu}J_{-\nu}(sa)-cJ_\nu(sa)}\right]=$$

$$=\frac{2i}{\pi a}\,\frac{i^{-2\nu}s^{2\nu}-c}{H_\nu^{(1)}(sa)\,[s^{2\nu}J_{-\nu}(sa)-cJ_\nu(sa)]}\,.$$

При $\lambda>0$, т. е. при вещественных положительных значениях s,

$$-\operatorname{Im}\frac{1}{m_{-\infty}+m_\infty}=\frac{\pi a}{2}\operatorname{Re}\left[H_\nu^{(1)}(sa)\,\frac{s^{2\nu}J_{-\nu}(sa)-cJ_\nu(sa)}{i^{-2\nu}s^{2\nu}-c}\right]=$$

$$=-\frac{\pi a}{2}\,[s^{2\nu}J_{-\nu}(sa)-cJ_\nu(sa)]\,\frac{J_\nu(sa)\,(c-s^{2\nu}\cos\nu\pi)+s^{2\nu}Y_\nu(sa)\sin\nu\pi}{c^2-2cs^{2\nu}\cos\nu\pi+s^{4\nu}}=$$

$$=\frac{\pi a}{2}\,\frac{[cJ_\nu(sa)-s^{2\nu}J_{-\nu}(sa)]^2}{(c-s^{2\nu})^2+2cs^{2\nu}(1-\cos\nu\pi)}\,.$$

Эта функция при всех значениях c непрерывна и, следовательно, положительная часть спектра непрерывна. При $\lambda<0$, т. е. при $s=i|s|$, выразив функции $H_\nu^{(1)}(sa)$, $J_\nu(sa)$ и $J_{-\nu}(sa)$ через функции $K_\nu(|s|a)$, $I_\nu(|s|a)$ и $I_{-\nu}(|s|a)$, получим:

$$-\frac{1}{m_{-\infty}+m_\infty}=aK_\nu(|s|a)\,\frac{|s|^{2\nu}I_{-\nu}(|s|a)-cI_\nu(|s|a)}{|s|^{2\nu}-c}\,. \tag{119}$$

Эта функция вещественна и, следовательно, отрицательная часть спектра не содержит точек непрерывного спектра. При $c<0$ эта функция непрерывна и спектр вообще не имеет отрицательной части. Используя (90), найдем, что

$$u(x,\lambda)=\psi_1-m_{-\infty}\psi_2=\sqrt{\frac{x}{a}}\,\frac{s^{2\nu}J_{-\nu}(sx)-cJ_\nu(sx)}{s^{2\nu}J_{-\nu}(sa)-cJ_\nu(sa)}\,.$$

Подставив это выражение и вычисленные выше величины в (82) и (87), придем к разложению

$$g(x)=\int_0^\infty \sqrt{x}\,\frac{s^{2\nu}J_{-\nu}(sx)-cJ_\nu(sx)}{(c-s^{2\nu})^2+2cs\,(1-\cos\nu\pi)}\,s\,ds\int_0^\infty \sqrt{\xi}\,\times$$

$$\times\,[s^{2\nu}J_{-\nu}(s\xi)-cJ_\nu(s\xi)]\,g(\xi)\,d\xi,\quad c<0,\quad (120)$$

которое при $c=-\infty$ примет вид (118).

Если $c>0$, то в точке $|s|=c^{\frac{1}{2\nu}}$, т. е. при $l=-c^{\frac{1}{\nu}}$, выражение (119) имеет полюс. Вблизи полюса

$$|s|^{2\nu}I_{-\nu}(|s|a)-cI_\nu(|s|a)=c\,[I_{-\nu}(|s|a)-I_\nu(|s|a)]+\ldots=$$

$$=\frac{2c\sin\nu\pi}{\pi}K_\nu(|s|a)+\ldots$$

Многоточием здесь обозначены члены, имеющие больший порядок малости, чем написанные. Подставив значения величин в (119), получим

$$-\frac{1}{m_{-\infty}+m_\infty}=-2ac^{\frac{1}{\nu}}\frac{\sin\nu\pi}{\nu\pi}K_\nu^2\left(c^{\frac{1}{2\nu}}a\right)\frac{1}{\lambda+c^{\frac{1}{\nu}}}+\ldots$$

Скачок спектральной функции при $\lambda=-c^{\frac{1}{\nu}}$ равен взятому с обратным знаком коэффициенту при $\left(\lambda+c^{\frac{1}{\nu}}\right)^{-1}$. Далее, при $l=-c^{\frac{1}{\nu}}$

$$s^{2\nu}=l^\nu=\left(-c^{\frac{1}{\nu}}\right)^\nu=(-1)^\nu c,$$

$$s^{2\nu}J_{-\nu}(sx)-cJ_\nu(sx)=c\left[(-1)^\nu J_{-\nu}\left(ic^{\frac{1}{2\nu}}x\right)-cJ_\nu\left(ic^{\frac{1}{2\nu}}x\right)\right]=$$

$$=ci^\nu\left[I_{-\nu}(c^{\frac{1}{2\nu}}x)-I_\nu\left(c^{\frac{1}{2\nu}}x\right)\right]=\frac{2c\sin\nu\pi}{\pi}K\left(c^{\frac{1}{2\nu}}x\right),$$

в силу чего

$$u\left(x,-c^{\frac{1}{\nu}}\right)=\sqrt{\frac{x}{a}}\,\frac{K_\nu\left(c^{\frac{1}{2\nu}}x\right)}{K_\nu\left(c^{\frac{1}{2\nu}}a\right)}.$$

Следовательно, при $c>0$ к правой части (120) надо добавить член

$$2c^{\frac{1}{\nu}}\frac{\sin\nu\pi}{\nu\pi}\sqrt{x}\,K_\nu\left(c^{\frac{1}{2\nu}}x\right)\int_0^\infty\sqrt{\xi}\,K_\nu\left(c^{\frac{1}{2\nu}}\xi\right)g(\xi)\,d\xi.\qquad(121)$$

При $c \to \infty$, $x \neq 0$ функция $K_\nu\left(c^{\frac{1}{2\nu}}x\right)$ убывает как $e^{-c^{\frac{1}{2\nu}}x}$. Следовательно, при $c = \infty$ дополнительный член обращается в нуль и снова, как и при $c = -\infty$, получается разложение вида (118).

в) Пусть, наконец, $\nu = 0$. Используя (111) и (98), а также (92) и (93), найдем, что $(s = \sqrt{l})$:

$$m_{-\infty} + m_\infty = s\left[\frac{H_0^{(1)\prime}(sa)}{H_0^{(1)}(sa)} - \frac{Y_0'(sa) - \frac{2}{\pi} J_0'(sa)\ln s - cJ_0'(sa)}{Y_0(sa) - \frac{2}{\pi} J_0(sa)\ln s - cJ_0(sa)}\right] =$$

$$= s\,\frac{H_0^{(1)\prime}(sa)Y_0(sa) - H_0^{1}(sa)Y_0'(sa) - \left(\frac{2}{\pi}\ln s + c\right)\left[H_0^{(1)\prime}(sa)J_0(sa) - H_0^{1}(sa)J_0'(sa)\right]}{H_0^{(1)}(sa)\left[Y_0(sa) - \frac{2}{\pi} J_0(sa)\ln s - cJ_0(sa)\right]} =$$

$$= \frac{2}{\pi a}\,\frac{1 + i\left(\frac{2}{\pi}\ln s + c\right)}{H_0^{(1)}(sa)\left[\left(\frac{2}{\pi}\ln s + c\right)J_0(sa) - Y_0(sa)\right]}.$$

Далее найдем, что ввиду (61) гл. XIII, для $l = \lambda > 0$, $s = \lambda^{\frac{1}{2}} > 0$,

$$-\operatorname{Im}\frac{1}{m_{-\infty} + m_\infty} = \frac{\pi a}{2}\,\frac{\left[\left(c + \frac{2}{\pi}\ln s\right)J_0(sa) - Y_0(sa)\right]^2}{\left(c + \frac{2}{\pi}\ln s\right)^2 + 1}, \quad \lambda > 0.$$

Эта функция непрерывна при всех $\lambda > 0$. Для $\lambda < 0$, т. е. для чисто мнимых значений s, получим

$$-\frac{1}{m_{-\infty} + m_\infty} = \frac{aK_0(|s|a)}{c + \frac{2}{\pi}\ln s}\left[\left(c + \frac{2}{\pi}\ln|s|\right)J_0(|s|a) + \frac{2}{\pi}K_0(|s|a)\right], \quad \lambda < 0.$$

Эта функция вещественна и, следовательно, отрицательный спектр не содержит непрерывной части. При $|s| = e^{-\frac{\pi c}{2}}$, т. е. при $\lambda = \lambda_0 = e^{-\pi c}$, имеется полюс, в окрестности которого

$$c + \frac{2}{\pi}\ln|s| = c + \frac{1}{\pi}\ln|\lambda| = c + \frac{1}{\pi}\ln\left[|\lambda_0|\left(1 + \frac{|\lambda| - |\lambda_0|}{|\lambda_0|}\right)\right] \approx$$

$$\approx \frac{1}{\pi}\,\frac{|\lambda| - |\lambda_0|}{|\lambda_0|} = \frac{1}{\pi}\,\frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda_0} = -\frac{1}{\pi}e^{\pi c}(\lambda + e^{-\pi c}).$$

Отсюда в окрестности $\lambda = -e^{-\pi c}$

$$-\frac{1}{m_{-\infty} + m_\infty} = -\frac{2aK_0^2\left(e^{-\frac{\pi c}{2}}a\right)}{\lambda + e^{-\frac{\pi}{c}}} + \ldots$$

Предоставив остающиеся выкладки читателю, выпишем окончательный вид разложения:

$$g(x)=\sqrt{x}\int_0^\infty \frac{\left(c+\frac{2}{\pi}\ln s\right)J_0(sx)-Y_0(sx)}{\left(c+\frac{2}{\pi}\ln s\right)^2+1}\,s\,ds\int_0^\infty\sqrt{\xi}\left[\left(c+\frac{2}{\pi}\ln s\right)\times\right.$$

$$\left.\times J_0(s\xi)-Y_0(s\xi)\right]g(\xi)\,d\xi+2\sqrt{x}\,K_0\left(xe^{-\frac{\pi c}{2}}\right)\times$$

$$\times\int_0^\infty\sqrt{\xi}K_0\left(\xi e^{-\frac{\pi c}{2}}\right)g(\xi)\,d\xi. \qquad (122)$$

Глава XXXIII

ПРИМЕНЕНИЕ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

§ 1. Введение

Преобразование, которым функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ n вещественных переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ сопоставляется функция

$$\bar{f}(x_1, \ldots, x_{j-1}, \gamma, x_{j+1}, \ldots, x_n)=$$
$$=\int_a^b f(x_1, \ldots, x_{j-1}, \zeta, x_{j+1}, \ldots, x_n)K(\zeta, \gamma)\rho(\zeta)\,d\zeta \qquad (1)$$

$n-1$ вещественных переменных $x_1, x_2, \ldots, x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots, x_n$ и переменной γ, вообще говоря комплексной, называют *интегральным преобразованием по переменной* x_j. Переменную x_j называют *переменной преобразования*. Ради большей наглядности ниже переменную преобразования будем обозначать символом ζ. Интегральное преобразование (1) определяется *пределами преобразования* a, b, *ядром* $K(\zeta, \gamma)$ и *весовой функцией* $\rho(\zeta)$. Пределы a, b могут быть и бесконечными; свойства функций $K(\zeta, \gamma)$ и $\rho(\zeta)$ будут установлены ниже. Функцию $\bar{f}(x_1, \ldots, x_{j-1}, \gamma, x_{j+1}, \ldots, x_n)$ называют *интегральным преобразованием*, а также *интегральной трансформацией*, *изображением* или *образом функции* $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Ниже будет применяться преимущественно первый из этих равнозначащих терминов. Функцию $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ часто называют *оригиналом* или *прообразом* функции $\bar{f}(x_1, \ldots, x_{j-1}, \gamma, x_{j+1}, \ldots, x_n)$.

Возможны интегральные преобразования сразу по нескольким или по всем переменным. Обобщение на этот случай данного выше