Предоставив остающиеся выкладки читателю, выпишем окончательный вид разложения:

$$g(x)=\sqrt{x}\int_0^\infty \frac{\left(c+\frac{2}{\pi}\ln s\right)J_0(sx)-Y_0(sx)}{\left(c+\frac{2}{\pi}\ln s\right)^2+1}\,s\,ds\int_0^\infty \sqrt{\xi}\left[\left(c+\frac{2}{\pi}\ln s\right)\times\right.$$

$$\left.\times J_0(s\xi)-Y_0(s\xi)\right]g(\xi)\,d\xi+2\sqrt{x}\,K_0\left(xe^{-\frac{\pi c}{2}}\right)\times$$

$$\times\int_0^\infty \sqrt{\xi}K_0\left(\xi e^{-\frac{\pi c}{2}}\right)g(\xi)\,d\xi. \qquad (122)$$

Глава XXXIII

ПРИМЕНЕНИЕ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

§ 1. Введение

Преобразование, которым функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ n вещественных переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ сопоставляется функция

$$\bar{f}(x_1, \ldots, x_{j-1}, \gamma, x_{j+1}, \ldots, x_n)=$$

$$=\int_a^b f(x_1, \ldots, x_{j-1}, \zeta, x_{j+1}, \ldots, x_n)\,K(\zeta, \gamma)\,\rho(\zeta)\,d\zeta \qquad (1)$$

$n-1$ вещественных переменных $x_1, x_2, \ldots, x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots, x_n$ и переменной γ, вообще говоря комплексной, называют *интегральным преобразованием по переменной* x_j. Переменную x_j называют *переменной преобразования*. Ради большей наглядности ниже переменную преобразования будем обозначать символом ζ. Интегральное преобразование (1) определяется *пределами преобразования* a, b, *ядром* $K(\zeta, \gamma)$ и *весовой функцией* $\rho(\zeta)$. Пределы a, b могут быть и бесконечными; свойства функций $K(\zeta, \gamma)$ и $\rho(\zeta)$ будут установлены ниже. Функцию $\bar{f}(x_1, \ldots, x_{j-1}, \gamma, x_{j+1}, \ldots, x_n)$ называют *интегральным преобразованием*, а также *интегральной трансформацией*, *изображением* или *образом функции* $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Ниже будет применяться преимущественно первый из этих равнозначащих терминов. Функцию $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ часто называют *оригиналом* или *прообразом* функции $\bar{f}(x_1, \ldots, x_{j-1}, \gamma, x_{j+1}, \ldots, x_n)$.

Возможны интегральные преобразования сразу по нескольким или по всем переменным. Обобщение на этот случай данного выше определения очевидно. Ниже будут рассматриваться преобразования только по одной переменной. Последовательное применение таких преобразований, однако, эквивалентно некоторому преобразованию по нескольким переменным.

Преобразованные функции будем обозначать теми же символами, что и до преобразования, но с каким-либо значком над символом: чертой, волнистой чертой и т. п По какой переменной осуществлено преобразование, будет ясно из того, от каких аргументов зависит преобразованная функция. Например, $\bar{f}(\gamma, x_2, x_3)$ — интегральное преобразование функции $f(x_1, x_2, x_3)$ по переменной x_1. Аргументы в тех случаях, когда это не может повести к недоразумениям, явно выписывать не будем.

Преобразование, которым функция $\bar{f}(x_1, \ldots, x_{j-1}, \gamma, x_{j+1}, \ldots, x_n)$ снова преобразуется в функцию $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, называют *обратным* интегральному преобразованию (1) или просто *обратным преобразованием*. При этом само преобразование (1) называют *прямым*.

Интегральное преобразование определено, когда интеграл в правой части (1) существует. Для практического применения интегральных преобразований, однако, важно, чтобы существовали также обратные преобразования, которые, совместно с (1), устанавливали бы *взаимно однозначное соответствие* между двумя классами функций: исходным классом функций f и классом функций $\bar{f}$, являющихся их интегральными преобразованиями. При этом условии можно установить соответствие также между операциями на обоих классах функций и решение задачи, заданной для функций одного класса, привести к задаче для функций другого класса, которая может быть проще. Решив эту последнюю, с помощью обратного преобразования находят решение первоначальной задачи. Хорошо известным читателю примером является операционное исчисление, основанное на использовании интегрального преобразования Лапласа. Здесь дифференцированию функций исходного класса функций соответствует умножение на независимую переменную функций, являющихся преобразованиями Лапласа. Благодаря этому задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами приводятся к алгебраическим задачам для преобразованных функций.

Аналогична идея применения интегральных преобразований и в задачах для уравнений с частными производными: стремятся выбрать интегральное преобразование, которое позволило бы дифференциальные операции по одной из переменных заменить алгебраическими операциями. Когда это удается, преобразованная задача обычно проще исходной. Найдя решение преобразованной задачи, с помощью обратного преобразования находят и решение исходной. Основным отличием от операционного исчисления в применении интегральных преобразований к уравнениям с частными производными является использование более широкого набора интегральных преобразований, что важно, когда коэффициенты уравнений переменны.

§ 2. Условия, обеспечивающие возможность интегрального преобразования

Рассмотрим дифференциальное уравнение второго порядка:

$$Mu = f, \tag{2}$$

где

$$Mu = \sum_{\alpha,\,\beta=0}^{3} a_{\alpha\beta} \frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} + \sum_{\alpha=0}^{3} b_\alpha \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} + c, \qquad a_{ij} = a_{ji} \tag{3}$$

— дифференциальное выражение второго порядка с переменными коэффициентами, а f — заданная функция.

Выберем одну из переменных $x_j = \zeta$ в качестве переменной преобразования, рассматривая остальные переменные $x_1, \ldots, x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots, x_n$ как параметры. Пусть a и $b > a$ — пределы изменения ζ, которые могут быть и бесконечными. В общем случае a и b могут зависеть от параметров x_α, $\alpha \neq j$. Это не исключает полностью возможности выполнения интегрального преобразования уравнения, однако настолько усложняет преобразованное уравнение, что стремиться к этой степени общности нет смысла. Поэтому будем считать, что

I°. *Пределы a, b изменения переменной преобразования не зависят от параметров x_α, $\alpha \neq j$.*

Подвергнув уравнение (2) в интервале (a, b) изменения переменной ζ интегральному преобразованию вида (1), получим:

$$\int_a^b \left(\sum_{\alpha,\,\beta \neq j} a_{\alpha\beta} \frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha\, \partial x_\beta} + \sum_{\alpha \neq j} b_\alpha \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} + c_2 u \right) K(\zeta, \gamma)\, \rho(\zeta)\, d\zeta +$$

$$+ \int_a^b \left(a_{jj} \frac{\partial^2 u}{\partial \zeta^2} + 2 \sum_{\beta \neq j} a_{j\beta} \frac{\partial^2 u}{\partial \zeta \partial x_\beta} + b_j \frac{\partial u}{\partial \zeta} + c_1 u \right) K(\zeta, \gamma)\, \rho(\zeta)\, d\zeta = \bar{f}, \tag{4}$$

где $c_1 + c_2 = c$, а $\bar{f}$ — интегральное преобразование свободного члена f. Поставим целью найти *достаточные условия*, при которых это интегральное соотношение может быть преобразовано в *дифференциальное уравнение относительно интегрального преобразования*

$$\bar{u} = \int_a^b u K(\zeta, \gamma)\, \rho(\zeta)\, d\zeta \tag{5}$$

искомой функции u.

Для сокращения письма дифференцирование по переменной преобразования $x_j = \zeta$ ниже будем обозначать штрихами.