ными производными является использование более широкого набора интегральных преобразований, что важно, когда коэффициенты уравнений переменны.

§ 2. Условия, обеспечивающие возможность интегрального преобразования

Рассмотрим дифференциальное уравнение второго порядка:

$$Mu = f, \tag{2}$$

где

$$Mu = \sum_{\alpha,\,\beta=0}^{3} a_{\alpha\beta} \frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} + \sum_{\alpha=0}^{3} b_\alpha \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} + c, \qquad a_{ij} = a_{ji} \tag{3}$$

— дифференциальное выражение второго порядка с переменными коэффициентами, а f — заданная функция.

Выберем одну из переменных $x_j = \zeta$ в качестве переменной преобразования, рассматривая остальные переменные $x_1, \ldots, x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots, x_n$ как параметры. Пусть a и $b > a$ — пределы изменения ζ, которые могут быть и бесконечными. В общем случае a и b могут зависеть от параметров x_α, $\alpha \neq j$. Это не исключает полностью возможности выполнения интегрального преобразования уравнения, однако настолько усложняет преобразованное уравнение, что стремиться к этой степени общности нет смысла. Поэтому будем считать, что

I°. *Пределы a, b изменения переменной преобразования не зависят от параметров x_α, $\alpha \neq j$.*

Подвергнув уравнение (2) в интервале (a, b) изменения переменной ζ интегральному преобразованию вида (1), получим:

$$\int_a^b \left(\sum_{\alpha,\,\beta \neq j} a_{\alpha\beta} \frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha\, \partial x_\beta} + \sum_{\alpha \neq j} b_\alpha \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} + c_2 u \right) K(\zeta, \gamma)\, \rho(\zeta)\, d\zeta +$$

$$+ \int_a^b \left(a_{jj} \frac{\partial^2 u}{\partial \zeta^2} + 2 \sum_{\beta \neq j} a_{j\beta} \frac{\partial^2 u}{\partial \zeta \partial x_\beta} + b_j \frac{\partial u}{\partial \zeta} + c_1 u \right) K(\zeta, \gamma)\, \rho(\zeta)\, d\zeta = \bar{f}, \tag{4}$$

где $c_1 + c_2 = c$, а $\bar{f}$ — интегральное преобразование свободного члена f. Поставим целью найти *достаточные условия*, при которых это интегральное соотношение может быть преобразовано в *дифференциальное уравнение относительно интегрального преобразования*

$$\bar{u} = \int_a^b uK(\zeta, \gamma)\, \rho(\zeta)\, d\zeta \tag{5}$$

искомой функции u.

Для сокращения письма дифференцирование по переменной преобразования $x_j = \zeta$ ниже будем обозначать штрихами.

Предположим, что:

2^0. *Интегралы в левой части* (4) *равномерно сходятся относительно параметров* x_α, $\alpha \neq j$, *а подынтегральные выражения — непрерывные функции этих параметров.*

3^0. *Дифференциальное выражение* (3) *может быть представлено в виде*

$$Mu = M_j u + \hat{M}u, \tag{6}$$

где

$$M_j u = a_{jj}\frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2} + b_j \frac{\partial u}{\partial x_j} + c_1 u = a_{jj}u'' + b_j u' + c_1 u, \tag{7}$$

а

$$\hat{M}u = \sum_{\alpha,\ \beta \neq j} a_{\alpha\beta}\frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} + \sum_{\alpha \neq j} b_\alpha \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} + c_2 u, \quad c_2 = c - c_1 \tag{8}$$

— *дифференциальное выражение, не содержащее ни производных по переменной преобразования* $x_j = \zeta$, *ни зависящих от нее коэффициентов.*

Это предположение равносильно двум следующим:

3^0а. *Коэффициенты* a_{kl} *и* b_k *при* k, $l \neq j$ *не зависят от* $x_j = \zeta$.

3^0б. $a_{jk} = 0$ при $k \neq j$. (9)

Ввиду 2^0 в первом интеграле в левой части (4) можно изменить порядок интегрирования по ζ и дифференцирования по x_α, $\alpha \neq j$, а тогда ввиду 3^0а этот интеграл преобразуется к виду

$$\sum_{\alpha,\ \beta \neq j} a_{\alpha\beta}\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} + \sum_{\alpha \neq j} b_\alpha \frac{\partial \bar{u}}{\partial x_\alpha} + c_2 \bar{u}.$$

Отметим, что это преобразование эквивалентно формальной замене в (6)

$$\hat{M}u \longrightarrow \hat{M}\bar{u}.$$

Второй интеграл в левой части (4) проинтегрируем по частям:

$$\int_a^b \left(a_{jj}\frac{\partial^2 u}{\partial \zeta^2} + 2\sum_{\beta \neq j} a_{j\beta}\frac{\partial^2 u}{\partial \zeta \partial x_\beta} + b_j \frac{\partial u}{\partial \zeta} + c_1 u\right) K(\zeta,\ \gamma)\,\rho(\zeta)\,d\zeta =$$

$$= \left\{\left[a_{jj}\frac{\partial u}{\partial \zeta} + \left(b_j - \frac{\partial a_{jj}}{\partial \zeta}\right)u + 2\sum_{\beta \neq j} a_{j\beta}\frac{\partial u}{\partial x_\beta}\right] K(\zeta, \gamma)\,\rho(\zeta) - u a_{jj}\frac{\partial (K\rho)}{\partial \zeta}\right\}\Bigg|_a^b +$$

$$+ \int_a^b \left(\frac{\partial^2 (a_{jj}K\rho)}{\partial \zeta^2} - \frac{\partial (b_j K\rho)}{\partial \zeta} + c_1 K\rho\right) u\,d\zeta - 2\sum_{\beta \neq j}\int_a^b \frac{\partial u}{\partial x_\beta}\frac{\partial (a_{j\beta}K\rho)}{\partial \zeta}\,d\zeta. \tag{10}$$

Последняя сумма в правой части обращается в нуль ввиду 3^0б. Преобразованное уравнение не будет содержать интегральных членов, если

$$\frac{\partial^2 (a_{jj} K\rho)}{\partial\zeta^2} - \frac{\partial (b_j K\rho)}{\partial\zeta} + c_1 K\rho = -s^2 K\rho, \tag{11}$$

где s^2 — величина, не зависящая от ζ. Тогда

$$\int_a^b \left(\frac{\partial^2 (a_{jj} K\rho)}{\partial\zeta^2} - \frac{\partial (b_j K\rho)}{\partial\zeta} + c_1 K\rho \right) u d\zeta = -s^2 \int_a^b u K \rho d\zeta = -s^2 \overline{u}.$$

Соотношение (11) примем за уравнение, определяющее ядро преобразования при $a < \zeta < b$ (при $\zeta = a$ и $\zeta = b$ ядро будет определено граничными условиями). Сделаем определенные предположения о свойствах коэффициентов a_{jj}, b_j и c_1. Можно предполагать, что коэффициенты a_{jj}, b_j и c_1 зависят от параметров x_α, $\alpha \neq j$, если постулируемые ниже их свойства имеют место равномерно относительно совокупности этих параметров. Однако зависимость a_{jj}, b_j и c_1 от x_α, вообще говоря, настолько усложняет преобразованное уравнение, что в этой степени общности рассмотрения нет смысла. Поэтому примем, что:

4°. *Коэффициенты* a_{jj}, b_j *и* c_1 *не зависят от параметров* x_α, $\alpha \neq j$.

Далее предположим, что:

5°. *При* $a < \zeta < b$ *величины* a''_{jj}, b'_j, c_1 *непрерывны по* ζ, *а* $a_{jj} > 0$.

Возможность отклонения от условий 5° в граничных точках $\zeta = a$ и $\zeta = b$ будет обсуждена в следующих параграфах (см. также гл. XXXII, § 1).

При условиях 5° уравнение (11) выбором весовой функции $\rho(\zeta)$ можно преобразовать в самосопряженное (гл. XXXII, § 1). Для этого запишем его в виде

$$a_{jj}\rho K'' + [2(a_{jj}\rho)' - b_j\rho] K' - qK = -s^2 \rho K, \tag{12}$$

где

$$q = -[(a_{jj}\rho)'' - (b_j\rho)' + c_1\rho] \tag{13}$$

— непрерывная функция переменной преобразования ζ. Определим функцию ρ условием:

$$(a_{jj}\rho)' = b_j\rho, \tag{14}$$

откуда

$$a_{jj}\rho' + (a'_{jj} - b_j)\rho = 0.$$

Легко видеть, что решением этого уравнения служит функция

$$\rho(\zeta) = e^{-\int^{\zeta} \frac{1}{a_{jj}} (a'_{jj} - b_j)\, d\zeta}. \tag{15}$$

Здесь символ $\int^{\zeta}$ означает, что нижним пределом может быть любая точка из интервала $a \leqslant \zeta \leqslant b$ определения коэффициентов

a_{jj}, b_j. Весовая функция $\rho(\zeta)$, определенная (15), положительна при всех ζ из интервала $a < \zeta < b$ и имеет непрерывную вторую производную. При рассматриваемом выборе весовой функции вследствие (14) уравнение (12) примет вид

$$-(pK')' + qK = s^2 \rho K, \tag{16}$$

где

$$p = a_{jj}\rho, \quad q = -c_1\rho. \tag{17}$$

Ввиду 5° при $a < \zeta < b$ коэффициент $p > 0$, а величины p'' и q непрерывны.

Отметим, что тогда, когда ядро интегрального преобразования удовлетворяет уравнению (11) или (16), то интегральное преобразование слагаемого $M_j u$ в (6) формально эквивалентно замене

$$M_j u \to -s^2 \bar{u}.$$

Тем самым дифференциальная операция M_j заменяется алгебраической операцией умножения на $-s^2$.

Обратимся к внеинтегральному члену в правой части (10). При условиях (9) и (14) он равен разности

$$N_b - N_a, \tag{18}$$

где N_b и N_a — значения выражения

$$N = p(u'K - uK') \tag{19}$$

при $\zeta = b$ и $\zeta = a$ соответственно. При обозначении (18) и условиях 1°—5° преобразованное уравнение (2) примет вид

$$\hat{M}\bar{u} - s^2\bar{u} = \bar{f} + N_a - N_b. \tag{20}$$

Чтобы разность $N_a - N_b$ при надлежащем выборе ядра преобразования могла быть выражена только через заданные в задаче величины, достаточно предположение

6°. *Дополнительные данные задачи (граничные и начальные условия и т. п.) распадаются на две группы, из которых первая не содержит производных по переменной преобразования и зависящих от нее коэффициентов, а вторая не содержит производных по параметрам x_α, $\alpha \neq j$, и представляет условия, заданные на пределах a, b. Если первая группа данных содержит производные по x_α, то порядок дифференцирования по x_α и интегрирования по $x_j = \zeta$ может быть изменен.*

Применение интегрального преобразования к первой группе данных, очевидно, сводится к замене функций переменной $x_j = \zeta$ их интегральными преобразованиями. Например, граничное условие

$$\left(\alpha \frac{\partial u}{\partial x_k} + \beta u\right)\Big|_{x_k = a_k} = \varphi, \quad k \neq j,$$

в котором по сделанному выше предположению коэффициенты α и β не зависят от ζ, преобразуется в граничное условие

$$\left(\alpha \frac{\partial \bar{u}}{\partial x_k} + \beta \bar{u}\right)\Big|_{x_k=a_k} = \bar{\varphi}.$$

Преобразованные данные первой группы, т. е. данные первой группы, в которых произведена замена

$$u \longrightarrow \bar{u},$$

представляют полную совокупность дополнительных данных преобразованной задачи. В самом деле, вторая группа данных предполагается заданной на пределах $x_j = a$ и $x_j = b$, т. е. представляет условия по переменной преобразования. Но данные по переменной преобразования не могут входить в дополнительные данные преобразованной задачи, поскольку она, по условию, не должна содержать дифференциальных операций по $x_j = \zeta$ или γ.

Данные по x_j, однако, используются при вычислении разности $N_a - N_b$ и, следовательно, учитываются в преобразованном уравнении. Конкретное вычисление разности $N_a - N_b$ будет произведено в следующих параграфах применительно к различным формам данных по переменной преобразования.

Предположение 5⁰ исключает практически важный случай $a_{jj} = 0$, характерный для уравнений параболического типа, когда переменная $x_j = t$ играет роль времени. Рассмотрим этот случай отдельно, предположив, что:

$\bar{5}^0$. *Уравнение задачи имеет вид*

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \hat{M}u = f, \tag{21}$$

где $\hat{M}u$ — дифференциальное выражение, не содержащее ни производных по t, ни зависящих от t коэффициентов.

Подвергнув уравнение (21) интегральному преобразованию с ядром $K(t, \gamma)$ в пределах от $t = 0$ до $t = \infty$, получим

$$\int_0^\infty \frac{\partial u}{\partial t} K\,dt + \hat{M}\bar{u} = \bar{f}. \tag{22}$$

Весовая функция ρ принята равной единице, а

$$\bar{u} = \int_0^\infty Ku\,dt.$$

Проинтегрировав по частям, получим

$$\int_0^\infty \frac{\partial u}{\partial t} K\,dt = [Ku]\,\Big|_0^\infty - \int_0^\infty K'u\,dt.$$

Преобразованное уравнение не будет содержать интегральных членов, если

$$K' = -sK, \tag{23}$$

где s — число, откуда

$$K(t, \gamma) = K(0, \gamma)\, e^{-st}. \tag{24}$$

Продифференцировав уравнение (23) по t, легко привести его к виду (16):

$$K'' = s^2 K. \tag{25}$$

Уравнение (22) при условии (23) преобразуется к виду

$$\hat{M}\bar{u} + s\bar{u} = \bar{f} - [Ku] \Big|_0^\infty. \tag{26}$$

§ 3. Интегральные преобразования в конечных пределах

В этом параграфе выясним, как следует выбрать ядро преобразования, чтобы вычислить разность $N_a - N_b$, входящую в преобразованное уравнение (20), и установим вид обратного преобразования при конечных пределах изменения переменной ζ.

Примем сначала, что коэффициенты a_{jj}, b_j и c_1 удовлетворяют условиям, указанным в 5^0, также и в точках a, b (точнее в a справа и в b слева, так как точки вне интервала с конечными точками a, b не рассматриваются). Тогда условиями в точках a, b могут быть либо граничные условия вида

$$[\alpha_a u' + \beta_a u]_{x_j = a} = \varphi_a, \quad [\alpha_b u' + \beta_b u]_{x_j = b} = \varphi_b, \tag{27}$$

либо условия периодичности (при этом предполагается, что и $p(a) = p(b)$):

$$u'(a) = u'(b); \quad u(a) = u(b). \tag{28}$$

Штрихи, как и в предыдущем параграфе, означают дифференцирование по переменной преобразования $x_j = \zeta$.

Рассмотрим граничное условие при $\zeta = b$. Ввиду (19)

$$N_b = [p(u'K - uK')]_{\zeta = b}. \tag{29}$$

Умножив граничное условие (27) для $\zeta = b$ сначала на $(pK)_{\zeta=b}$ и подставив значение $(pKu')_{\zeta=b}$ из (29), а затем умножив это граничное условие на $(pK')_{\zeta=b}$ и подставив значение $(pK'u)_{\zeta=b}$ из (29), получим два соотношения:

$$[up(\alpha_b K' + \beta_b K)]_{\zeta=b} + \alpha_b N_b = \varphi_b p(b) K(b, \gamma),$$
$$[u'p(\alpha_b K' + \beta_b K)]_{\zeta=b} - \beta_b N_b = \varphi_b p(b) K'(b, \gamma).$$