Преобразованное уравнение не будет содержать интегральных членов, если

$$K' = -sK, \tag{23}$$

где s — число, откуда

$$K(t, \gamma) = K(0, \gamma) e^{-st}. \tag{24}$$

Продифференцировав уравнение (23) по t, легко привести его к виду (16):

$$K'' = s^2 K. \tag{25}$$

Уравнение (22) при условии (23) преобразуется к виду

$$\hat{M}\bar{u} + s\bar{u} = \bar{f} - [Ku] \Big|_0^\infty. \tag{26}$$

§ 3. Интегральные преобразования в конечных пределах

В этом параграфе выясним, как следует выбрать ядро преобразования, чтобы вычислить разность $N_a - N_b$, входящую в преобразованное уравнение (20), и установим вид обратного преобразования при конечных пределах изменения переменной ζ.

Примем сначала, что коэффициенты a_{jj}, b_j и c_1 удовлетворяют условиям, указанным в 5^0, также и в точках a, b (точнее в a справа и в b слева, так как точки вне интервала с конечными точками a, b не рассматриваются). Тогда условиями в точках a, b могут быть либо граничные условия вида

$$[\alpha_a u' + \beta_a u]_{x_j = a} = \varphi_a, \quad [\alpha_b u' + \beta_b u]_{x_j = b} = \varphi_b, \tag{27}$$

либо условия периодичности (при этом предполагается, что и $p(a) = p(b)$):

$$u'(a) = u'(b); \quad u(a) = u(b). \tag{28}$$

Штрихи, как и в предыдущем параграфе, означают дифференцирование по переменной преобразования $x_j = \zeta$.

Рассмотрим граничное условие при $\zeta = b$. Ввиду (19)

$$N_b = [p(u'K - uK')]_{\zeta = b}. \tag{29}$$

Умножив граничное условие (27) для $\zeta = b$ сначала на $(pK)_{\zeta=b}$ и подставив значение $(pKu')_{\zeta=b}$ из (29), а затем умножив это граничное условие на $(pK')_{\zeta=b}$ и подставив значение $(pK'u)_{\zeta=b}$ из (29), получим два соотношения:

$$[up(\alpha_b K' + \beta_b K)]_{\zeta=b} + \alpha_b N_b = \varphi_b p(b) K(b, \gamma),$$
$$[u'p(\alpha_b K' + \beta_b K)]_{\zeta=b} - \beta_b N_b = \varphi_b p(b) K'(b, \gamma).$$

Если $\alpha_b K' + \beta_b K = 0$, то они позволяют выразить значение N_b одной из формул:

$$N_b = \frac{\varphi_b}{\alpha_b} p(b) K(b, \gamma), \quad \alpha_b \neq 0, \tag{30}$$

$$N_b = -\frac{\varphi_b}{\beta_b} p(b) K'(b, \gamma), \quad \beta_b \neq 0, \tag{31}$$

в зависимости от того, какой из коэффициентов α_b, β_b отличен от нуля (если оба они отличны от нуля, то формулы дают одинаковые результаты). Для нижнего предела $\zeta = a$ результат аналогичен:

$$N_a = \frac{\varphi_a}{\alpha_a} p(a) K(a, \gamma), \quad \alpha_a \neq 0, \tag{32}$$

$$N_a = -\frac{\varphi_a}{\beta_a} p(a) K'(a, \gamma), \quad \beta_a \neq 0. \tag{33}$$

Таким образом, когда условия 1^0—6^0 предыдущего параграфа выполнены, то интегральное преобразование задачи с граничными условиями (27) может быть доведено до конца, если ядро преобразования удовлетворяет однородным граничным условиям с теми же коэффициентами, что и в (27). Ввиду (16) отсюда следует, что ядро преобразования должно быть решением следующей *граничной задачи Штурма—Лиувилля:*

$$-(pK')' + qK = s^2 \rho K, \tag{34}$$

$$[\alpha_a K' + \beta_a K]_{\zeta=a} = 0, \quad [\alpha_b K' + \beta_b K]_{\zeta=b} = 0. \tag{35}$$

Из предыдущей главы, где подробно рассмотрена задача этого вида, вытекает, что:

1. Задача (34)—(35) имеет решения, отличные от тождественного нуля только при определенных вещественных значениях параметра s^2 — собственных числах задачи,— которые образуют бесконечную возрастающую последовательность — спектр собственных чисел:

$$s_0^2 < s_1^2 < s_2^2 < \ldots \tag{36}$$

2. Каждому собственному числу s_γ^2 задачи соответствует одно и только одно линейно независимое решение $K_\gamma(\zeta)$ задачи — собственная функция, принадлежащая числу s_γ^2. Ввиду однородности задачи собственные функции можно произвольным образом нормировать.

3. Собственные функции $K_\gamma(\zeta)$, $\gamma = 1, 2, 3, \ldots$ попарно ортогональны с весом ρ, откуда следует, что нормированные с тем же весом собственные функции удовлетворяют условию

$$\int_a^b K_j(\zeta) K_k(\zeta) \rho(\zeta) \, d\zeta = \begin{cases} 0, & j \neq k, \\ 1, & j = k. \end{cases} \tag{37}$$

Ниже всюду предполагается, что собственные функции $K_\gamma(\zeta)$ нормированы в соответствии с (37).

4. Функция $u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ такая, что интеграл

$$\int_a^b [u(x_1, \ldots, x_{j-1}, \zeta, x_{j+1}, \ldots, x_n)]^2 \rho(\zeta)\, d\zeta \tag{38}$$

существует и равномерно ограничен относительно совокупности значений, которые могут принимать параметры x_α, $\alpha \neq j$, может быть представлена в форме ряда

$$u(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{\gamma=0}^{\infty} u_\gamma(x_1, \ldots, x_{j-1}, \gamma, x_{j+1}, \ldots, x_n) K_\gamma(\zeta), \tag{39}$$

где

$$u_\gamma(x_1, \ldots, x_{j-1}, \gamma, x_{j+1}, \ldots, x_n) = \\ = \int_a^b u(x_1, \ldots, x_{j-1}, \zeta, x_{j+1}, \ldots, x_n) K_\gamma(\zeta) \rho(\zeta)\, d\zeta, \tag{40}$$

а равенство понимается в смысле сходимости в среднем. Разложение (39) и условия, наложенные на интеграл (38), непосредственно следуют из условий существования разложения (35) предыдущей главы для $\frac{g}{\sqrt{\rho}} = u$.

Сравнив (40) с интегральным преобразованием (5) искомой функции u, видим, что следует положить

$$K(\zeta, \gamma) = K_\gamma(\zeta), \tag{41}$$

где $K_\gamma(\zeta)$ — собственные функции задачи (34)—(35). Тем самым в данном случае достаточно рассматривать целочисленные значения аргумента γ. При каждом фиксированном целочисленном значении $\gamma = k$ ядро преобразования совпадает с k-й собственной функцией задачи Штурма—Лиувилля (34)—(35), а интегральное преобразование функции u — с ее k-м коэффициентом разложения в ряд (39) по собственным функциям этой задачи.

Если уравнение для u принадлежит такому классу уравнений, что интеграл от их решений вида (38) удовлетворяет сформулированным выше требованиям*, то формула (39) представит обратное преобразование. Из единственности разложения (38)—(39) вытекает взаимнооднозначная связь между функцией и ее интегральным преобразованием. Следовательно, решив преобразованную задачу, автоматически получим решение исходной задачи в форме ряда (39).

* Конечно, применяя интегральное преобразование, можно и не быть в этом уверенным, а получив решение, проверить его тем или иным способом.

Когда по переменной преобразования заданы *условия периодичности* (28), то выражение (19) можно вычислить — именно оно равно нулю, — если *ядро преобразования* также *подчинено условиям периодичности*. При этом результаты, относящиеся к задаче с граничными условиями вида (27), переносятся на задачу с условиями периодичности с единственным отличием: каждому собственному числу s_ν^2 может принадлежать не одна, а две линейно независимые собственные функции, которые для сохранения вида соотношений (39) — (40) должны быть выбраны взаимно ортогональными.

Предположим, наконец, что в граничных точках a, b коэффициенты a_{jj}, b_j, c_1 могут иметь особенности, т. е. испытывают бесконечный разрыв или коэффициент a_{jj} обращается в нуль. Это может иметь следствием, во-первых, изменение выражения в правой части обратного преобразования (39) и, во-вторых, изменение формулировки условий в граничных точках a, b.

Если особенности в точках a, b достаточно слабые, то обратное преобразование сохраняет свой вид. Более точную формулировку, что значит «достаточно слабые» особенности, читатель найдет в начале § 6 предыдущей главы (для $\rho = 1$). Практически, однако, этот случай малоинтересен. В отличие от этого часто встречаются «достаточно сильные» особенности в граничных точках. Если в одной или обеих граничных точках есть такого рода особенности, то изменения в форме прямого и обратного преобразований, которые могут при этом появиться, того же типа, как если бы интервал преобразования был бесконечен соответственно в одну или обе стороны. Возможное влияние этих особенностей на форму преобразований выяснено в следующем параграфе, посвященном преобразованиям с бесконечными пределами. Отметим, впрочем, что такие важные разложения, как разложение на конечном интервале по собственным функциям задач для уравнений Бесселя (гл. XXXII, § 10, п. 3) или Лежандра (гл. XVI, § 2), сохраняют вид (38) — (39), хотя соответствующие уравнения имеют особенности в граничных точках.

Обратимся к условиям, которым должно быть подчинено ядро в граничной точке ζ_0, где коэффициенты уравнения имеют особенность. Практически, как правило, $p(\zeta_0) = 0$, а на значения искомой функции u и ее производной u' при $\zeta = \zeta_0$ накладывается одно из следующих условий:

$$u < \infty, \tag{42}$$

$$\lim_{\zeta \to \zeta_0} u = 0 \quad \text{или} \quad \lim_{\zeta \to \zeta_0} pu' = 0. \tag{43}$$

Типичным является условие (42), причем в тех случаях, когда оно достаточно, чтобы обеспечить единственность решения, первое из условий (43) в общем случае слишком сильно, а второе следует из (42)*. Условие (42), вообще говоря, недостаточно, когда особенность недостаточно сильная, и тогда для обеспечения единственности решения необходимо одно из условий (43). Если ядро подчинить тем же условиям, что и искомую функцию, то в обоих случаях

$$\lim_{\zeta\to\zeta_0} N = \lim_{\zeta\to\zeta_0} p\,(u'K - uK') = 0. \tag{44}$$

§ 4. Интегральные преобразования с бесконечными пределами (общий случай)

Если переменная $x=\zeta$, выбранная в качестве переменной преобразования, изменяется в бесконечном интервале, то интегральное преобразование задачи по этой переменной имеет бесконечные пределы (один или оба).

1. Выясним сначала, как следует выбрать ядро преобразования, чтобы вычислить разность $N_a - N_b$, входящую в преобразованное уравнение (20).

Если интервал бесконечен лишь в одном направлении и в его начальной точке a коэффициенты a_{jj}, b_j, c_1 уравнения исходной задачи не имеют особенностей, то в ней, в зависимости от физического характера переменной $x_j=\zeta$, могут быть заданы либо граничное условие вида

$$(\alpha_a u' + \beta_a u) = \varphi_a,$$

либо начальные условия, т. е. заданы $u(a)$ и $u'(a)$. Из результатов предыдущего параграфа очевидно, что при задании граничного условия для возможности вычисления N_a ядро достаточно подчинить условию

$$\alpha_a K' + \beta_a K = 0, \tag{45}$$

тогда значение N_a может быть вычислено по формулам (32)—(33). Если же при $\zeta=a$ заданы начальные условия, то значение, определяемое (19) при $\zeta=a$, может быть вычислено всегда, и единственное ограничение, накладываемое начальными условиями на выбор ядра, состоит в том, чтобы значение N_a было конечным. Когда в точке $\zeta=a$ коэффициенты имеют особенности, то можно исходить из соображений, высказанных в конце предыдущего параграфа.

Обычным условием в отношении искомой функции u является обращение ее в нуль в бесконечно удаленной точке. Естественно потребовать, чтобы выражение $N_b = N_\infty$ также обращалось в нуль в этой точке, для чего при обращении в нуль функции

* См., например, А. Н. Тихонов и А. А. Самарский [12], где рассмотрены важнейшие случаи, а также В. И. Смирнов [1], т. III_2, п. 97—99.