следует из (42)*. Условие (42), вообще говоря, недостаточно, когда особенность недостаточно сильная, и тогда для обеспечения единственности решения необходимо одно из условий (43). Если ядро подчинить тем же условиям, что и искомую функцию, то в обоих случаях

$$\lim_{\zeta\to\zeta_0} N = \lim_{\zeta\to\zeta_0} p(u'K - uK') = 0. \tag{44}$$

§ 4. Интегральные преобразования с бесконечными пределами (общий случай)

Если переменная $x=\zeta$, выбранная в качестве переменной преобразования, изменяется в бесконечном интервале, то интегральное преобразование задачи по этой переменной имеет бесконечные пределы (один или оба).

1. Выясним сначала, как следует выбрать ядро преобразования, чтобы вычислить разность $N_a - N_b$, входящую в преобразованное уравнение (20).

Если интервал бесконечен лишь в одном направлении и в его начальной точке a коэффициенты a_{jj}, b_j, c_1 уравнения исходной задачи не имеют особенностей, то в ней, в зависимости от физического характера переменной $x_j=\zeta$, могут быть заданы либо граничное условие вида

$$(\alpha_a u' + \beta_a u) = \varphi_a,$$

либо начальные условия, т. е. заданы $u(a)$ и $u'(a)$. Из результатов предыдущего параграфа очевидно, что при задании граничного условия для возможности вычисления N_a ядро достаточно подчинить условию

$$\alpha_a K' + \beta_a K = 0, \tag{45}$$

тогда значение N_a может быть вычислено по формулам (32)—(33). Если же при $\zeta=a$ заданы начальные условия, то значение, определяемое (19) при $\zeta=a$, может быть вычислено всегда, и единственное ограничение, накладываемое начальными условиями на выбор ядра, состоит в том, чтобы значение N_a было конечным. Когда в точке $\zeta=a$ коэффициенты имеют особенности, то можно исходить из соображений, высказанных в конце предыдущего параграфа.

Обычным условием в отношении искомой функции u является обращение ее в нуль в бесконечно удаленной точке. Естественно потребовать, чтобы выражение $N_b = N_\infty$ также обращалось в нуль в этой точке, для чего при обращении в нуль функции

* См., например, А. Н. Тихонов и А. А. Самарский [12], где рассмотрены важнейшие случаи, а также В. И. Смирнов [1], т. III_2, п. 97—99.

и достаточно, чтобы значения K и K' оставались в этой точке конечными.

Преобразование по переменной t в уравнении параболического типа будет рассмотрено в следующем параграфе в связи с преобразованием Лапласа.

2. Выясним теперь, как следует выбрать ядро, чтобы было возможно обратное преобразование, и установим общее выражение для этого последнего.

Рассмотрим сначала интервал $[a, \infty)$*, т. е. интервал с начальной точкой a и неограниченный сверху, причем примем, что в точке $\zeta = a$ коэффициенты уравнения (16) особенностей не имеют. По характеру возможных изменений в форме прямого и обратного преобразований такой интервал эквивалентен конечному интервалу с существенной («достаточно сильной») особенностью в одной из граничных точек. Поэтому сказанное ниже может быть отнесено и к этому последнему случаю.

В § 7 предыдущей главы была доказана теорема разложения, выраженная формулами (70)—(71). Сформулируем эту теорему в более удобной здесь форме. Для этого заметим, что подстановкой

$$v(\zeta, \lambda) = K(\zeta, \lambda)\sqrt{\rho(\zeta)} \tag{46}$$

уравнение (16), определяющее ядро интегрального преобразования, преобразуется к рассматривавшемуся в предыдущей главе виду

$$-(\hat{p}v')' + \hat{q}v = \lambda v, \tag{47}$$

где

$$\hat{p} = \frac{p}{\rho}, \quad \hat{q} = \frac{q}{\rho} - \frac{1}{\sqrt{\rho}}\left[p\left(\frac{1}{\sqrt{\rho}}\right)'\right]'. \tag{48}$$

Используя (46), легко подсчитать, что рассмотренные в предыдущей главе начальные условия вида

$$v(a) = \cos\alpha, \quad p(a)\,v'(a) = \sin\alpha, \tag{49}$$

а также граничное условие (45) для ядра преобразования удовлетворяются, если положить

$$\alpha = -\operatorname{arctg}\left[\frac{p}{\rho}\left(\frac{\beta_a}{\alpha_a} - \frac{1}{2}\frac{\rho'}{\rho}\right]_{\zeta=a}, \tag{50}$$

$$\begin{gathered}(\sqrt{\rho}K)\big|_{\zeta=a} = \cos\alpha \quad \text{при} \quad \alpha_a \neq 0,\\ \left(\frac{p}{\sqrt{\rho}}K'\right)\bigg|_{\zeta=a} = 1 \quad \text{при} \quad \alpha_a = 0.\end{gathered} \tag{51}$$

Отметим, что роль условий (51) прежде всего состоит в надлежащей нормировке ядра.

---

* Относительно обозначений интервалов см. гл. XXXII, § 1.

Положим теперь в (70)—(71), гл. XXXII

$$x=\zeta,\quad \psi(x,\ \lambda)=K(\zeta,\ \lambda)\sqrt{\rho(\zeta)} \tag{52}$$

и представим в форме разложения (71) не функцию $f(\zeta)$, а функцию $f(\zeta)\sqrt{\rho}$. Тогда получим соотношения, которые, будучи дополнены указанием условий их существования, следующих из § 6 гл. XXXII, приведут к следующему предложению:

Пусть: 1) *при* $a\leqslant\zeta<\infty$* *функции* $\hat{p}$, $\hat{p}_1'$ *и* $\hat{q}$, *определенные* (48), *непрерывны, а функция* $\hat{p}>0$; 2) *функция* $K(\zeta,\ \lambda)$ *при* $a<\zeta<\infty$ *удовлетворяет уравнению* (16), *а при* $\zeta=a$ *граничному условию* (45) *и соответствующему условию* (51); 3) *функция* $f(\zeta)$ *удовлетворяет условию*

$$\int\limits_a^\infty |f(\zeta)|^2\rho(\zeta)\,d\zeta<\infty. \tag{53}$$

Тогда существует интегральное преобразование

$$\bar{f}(\lambda)=\int\limits_a^\infty f(\zeta)\,K(\zeta,\ \lambda)\,\rho(\zeta)\,d\zeta \tag{54}$$

и обратное ему преобразование

$$f(\zeta)=\int\limits_{-\infty}^\infty \bar{f}(\lambda)\,K(\zeta,\ \lambda)\,\sigma'(\lambda)\,d\lambda+ \\ +\sum_{(\alpha)}\bar{f}(\lambda_\alpha)\,K(\zeta,\ \lambda_\alpha)\,c_{-1}(\lambda_\alpha), \tag{55}$$

где функция $\sigma'(\lambda)$ *и коэффициенты* $c_{-1}(\lambda_j)$ *определяются коэффициентами* $\hat{p}$, $\hat{q}$ *и условиями, наложенными на* $K(\zeta,\ \lambda)$. *Равенства* (54) *и* (55) *понимаются в смысле сходимости в среднем и устанавливают взаимнооднозначное (в рамках этого вида сходимости) соответствие между функциями* $\bar{f}(\lambda)$ *и* $f(\zeta)$.

В частных случаях в правой части (55) интеграл или сумма могут отсутствовать.

Правая часть (55) может быть представлена в виде интеграла Стилтьеса**, как это сделано в предыдущей главе. Тогда

$$f(\zeta)=\int\limits_{-\infty}^\infty \bar{f}(\lambda)\,K(\zeta,\ \lambda)\,d\sigma(\lambda), \tag{56}$$

---

* Или при $a\leqslant\zeta<b$, когда в точке b имеются существенные особенности в коэффициентах. В этом случае предел ∞ изменения ζ в следующих ниже формулах следует заменить на b.

** См. начало § 6 предыдущей главы.

где $\sigma(\lambda)$ — неубывающая функция. Члены суммы в правой части (55) соответствуют точкам разрыва $\sigma(\lambda)$. Функция $\sigma(\lambda)$ определена формулой (73) предыдущей главы. Пример вычисления $\sigma(\lambda)$ — в п. 3 § 10 предыдущей главы.

Из предыдущей главы следует также следующее предложение:

Если при комплексном λ *с мнимой частью* $\operatorname{Im}\lambda > 0$ *существует решение* v *уравнения* (47), *не принадлежащее классу* $\mathscr{L}^2(a, \infty)$, *т. е. такое, что интеграл* $\int\limits_a^b |v|^2 d\zeta$ *расходится при* $b \to \infty$, *то функция* $\sigma(\lambda)$ *определена однозначно. В противном случае существует зависящее от одного параметра многообразие функций* $\sigma(\lambda)$, *удовлетворяющих* (55).

Формулы (54) и (56), а также (50) и (51), решают вопрос об условиях существования прямого и обратного преобразований на интервале $a \leqslant \zeta < \infty$.

3. Когда интервал изменения переменной интегрирования бесконечен в обоих направлениях, а также, когда интервал бесконечен в одном направлении, а на другом конце интервала коэффициенты уравнения имеют достаточно сильную особенность или такие особенности есть на обоих концах конечного интервала, то выражения для прямого и обратного преобразований могут быть сложнее, чем (54)—(55). Соответствующая теорема разложения сформулирована в § 9 предыдущей главы. Приведем ее для интервала $(-\infty, \infty)$ в удобной здесь форме.

Пусть: 1) *на любом конечном интервале функции* $\hat{p}(\zeta), \hat{p}'(\zeta)$ *и* $\hat{q}(\zeta)$ *вещественны и непрерывны, а функция* $\hat{p}(\zeta) > 0$;

2) *функции* $K_1(\zeta, \lambda)$, $K_2(\zeta, \lambda)$ *удовлетворяют уравнению* (16) *и начальным условиям* (*при произвольном конечном* $\zeta = a$):

$$(\sqrt{\rho}\, K_1)\big|_{\zeta=a} = 1,\ (\sqrt{\rho}\, K_1)'\big|_{\zeta=a} = 0; \tag{57}$$
$$(\sqrt{\rho}\, K_2)\big|_{\zeta=a} = 0,\ \left[\frac{p}{\rho}(\sqrt{\rho}\, K_2)'\right]\Big|_{\zeta=a} = 1;$$

3) *функция* $f(\zeta)$ *удовлетворяет условию*

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} |f(\zeta)|^2 \rho(\zeta)\, d\zeta < \infty. \tag{58}$$

Тогда существуют интегральные преобразования

$$\begin{aligned} \bar{f}_1(\lambda) &= \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(\zeta) K_1(\zeta, \lambda) \rho(\zeta)\, d\zeta, \\ \bar{f}_2(\lambda) &= \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(\zeta) K_2(\zeta, \lambda) \rho(\zeta)\, d\zeta \end{aligned} \tag{59}$$

и неубывающие функции $\sigma_{11}(\lambda)$, $\sigma_{12}(\lambda)$ и $\sigma_{22}(\lambda)$, такие, что

$$f(\zeta)=\int_{-\infty}^{\infty}\bar{f}_1(\lambda)K_1(\zeta,\ \lambda)\,d\sigma_{11}(\lambda)+$$
$$+\int_{-\infty}^{\infty}[\bar{f}_2(\lambda)K_1(\zeta,\ \lambda)+\bar{f}_1(\lambda)K_2(\zeta,\ \lambda)]\,d\sigma_{12}(\lambda)+$$
$$+\int_{-\infty}^{\infty}\bar{f}_2(\lambda)K_2(\zeta,\ \lambda)\,d\sigma_{22}(\lambda). \tag{60}$$

Если при комплексном l с мнимой частью $\operatorname{Im} l>0$ существуют решения v_1 и v_2 уравнения $-(\hat{p}v')'+\hat{q}v=lv$, не принадлежащие соответственно классам $\mathscr{L}^2(-\infty,\ a)$, $\mathscr{L}^2(a,\ \infty)$, то есть такие, что интегралы

$$\int_{-b}^{a}|v_1|^2\,d\zeta \quad \text{и} \quad \int_{a}^{b}|v_2|^2\,d\zeta$$

расходятся при $b\to\infty$, то функции $\sigma_{jk}(\lambda)$ определяются однозначно. В противном случае существует многообразие функций $\sigma_{jk}(\lambda)$, зависящих от одного или двух параметров.

Интегралы Стилтьеса в правой части (60), естественно, также могут быть представлены в форме, аналогичной правой части (55).

Формулы (59)—(60) решают вопрос об интегральных преобразованиях по переменной, изменяющейся в интервале, не ограниченном с обеих сторон.

4. Из (60) следует, что при преобразованиях с обоими бесконечными пределами для выполнения обратного преобразования надо знать два интегральных преобразования с линейно независимыми ядрами. Рассмотрим, например, интегральное преобразование с ядром $K(\zeta,\ \lambda)$, удовлетворяющим уравнению

$$-u''=\lambda u,\ -\infty<\zeta<\infty. \tag{61}$$

а) За точку a, фигурирующую в (57), примем точку $\zeta=0$. Тогда начальным условиям (57) удовлетворяют решения:

$$K_1(\zeta,\ \lambda)=\cos\left(\sqrt{\lambda}\,\zeta\right),\ K_2(\zeta,\ \lambda)=\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\sin\left(\sqrt{\lambda}\,\zeta\right).$$

При $\operatorname{Im}\lambda\neq0$ оба эти решения не принадлежат классам $\mathscr{L}^2(-\infty,0)$ и $\mathscr{L}^2(0,\ \infty)$ и, следовательно, функции $\sigma_{jk}(\lambda)$ и тем самым вид обратного преобразования (60) определяются единственным образом.

б) Вычислим величины $m_{-\infty}(l)$ и $m_{\infty}(l)$, входящие в формулы для вычисления $\sigma_{jk}(\lambda)$. Для уравнения (61) функция $\rho=1$, поэтому функции K_1 и K_2 совпадают с введенными в § 8 гл. XXXII функциями ψ_1 и ψ_2. Согласно § 8 гл. XXXII величины $m_{-\infty}(l)$ и

$m_\infty(l)$ удовлетворяют условию, что функции $u_1=\psi_1-m_\infty\psi_2$ и $u_2=\psi_1+m_\infty\psi_2$ при $\operatorname{Im} l>0$ принадлежат соответственно классам $\mathscr{L}^2(-\infty, 0)$ и $\mathscr{L}^2(0, \infty)$. Единственным линейно независимым решением уравнения (61), принадлежащим при $\operatorname{Im} l>0$ классу $\mathscr{L}^2(-\infty, 0)$, является функция $e^{-i\sqrt{l}\zeta}=\cos\sqrt{l}\zeta-i\sin\sqrt{l}\zeta$. В самом деле, заметив, что знаки $\operatorname{Im} l$ и $\operatorname{Im}\sqrt{l}$ совпадают, и обозначив $\sqrt{l}=\alpha+i\beta$, $\beta>0$, получим $e^{-i\sqrt{l}\zeta}=e^{-i\alpha\zeta+\beta\zeta}$, т. е. функция $e^{-i\sqrt{l}\zeta}$ экспоненциально убывает при $\zeta\to-\infty$. Поэтому должно быть

$$\cos\sqrt{l}\zeta-m_{-\infty}\frac{1}{\sqrt{l}}\sin\sqrt{l}\zeta=A\left(\cos\sqrt{l}\zeta-i\sin\sqrt{l}\zeta\right),$$

где A — постоянная. Положив $\zeta=0$, получим $A=1$, следовательно,

$$m_{-\infty}(l)=i\sqrt{l}.$$

Подобным же способом найдем, что и

$$m_\infty(l)=i\sqrt{l}.$$

в) По формулам (83) гл. XXXII найдем, что

$$M_{11}(l)=\frac{i}{2\sqrt{l}};\quad M_{12}(l)=M_{21}(l)=0,\quad M_{22}(l)=\frac{i}{2}\sqrt{l}.$$

Подставив эти выражения в (150) гл. XXXII, получим

$$d\sigma_{11}(\lambda)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\pi}\dfrac{d\lambda}{\sqrt{\lambda}}, & \lambda>0,\\ 0, & \lambda<0,\end{cases}\qquad d\sigma_{12}(\lambda)=d\sigma_{21}(\lambda)=0,$$

$$d\sigma_{22}=\begin{cases}\dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\lambda}\,d\lambda, & \lambda>0,\\ 0, & \lambda<0.\end{cases}$$

Из сформулированной в п. 3 теоремы теперь следует, что любая функция $f(\zeta)$, удовлетворяющая условию

$$\int_{-\infty}^{\infty}|f(\zeta)|^2\,d\zeta<\infty,$$

имеет интегральные преобразования

$$\bar{f}_c(\lambda)=\int_{-\infty}^{\infty}f(\zeta)\cos\left(\sqrt{\lambda}\zeta\right)d\zeta,\quad \bar{f}_s=\int_{-\infty}^{\infty}f(\zeta)\frac{\sin\left(\sqrt{\lambda}\zeta\right)}{\sqrt{\lambda}}\,d\zeta,\qquad(62)$$

зная которые, можно найти ее с помощью обратного преобразования:

$$f(\zeta)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty}\bar{f}_c(\lambda)\frac{\cos\left(\sqrt{\lambda}\zeta\right)}{\sqrt{\lambda}}\,d\zeta+\frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty}\bar{f}_s(\lambda)\sin\left(\sqrt{\lambda}\zeta\right)\,d\zeta,\qquad(63)$$

включающего оба преобразования (62).

Подставив (62) в (63) и положив $s^2=\lambda$, после простых преобразований получим *интегральную формулу Фурье:*

$$f(\zeta)=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty \cos s\zeta ds \int\limits_{-\infty}^\infty f(\xi)\cos s\xi d\xi +$$
$$+\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty \sin s\zeta ds \int\limits_{-\infty}^\infty f(\xi)\sin s\xi d\xi \qquad (64)$$

или, в более компактной форме,

$$f(\zeta)=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty ds \int\limits_{-\infty}^\infty f(\xi)\cos s(\zeta-\xi)\,d\xi.$$

С помощью тождества $\cos s(\zeta-\xi)=\frac{1}{2}e^{is(\zeta-\xi)}$, отсюда легко получить интегральную формулу Фурье в комплексной форме:

$$f(\zeta)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^\infty e^{i\zeta\xi} ds \int\limits_{-\infty}^\infty f(\xi)e^{-is\xi}d\xi. \qquad (65)$$

Из формулы (65) следует, что в рассматриваемом случае два интегральных преобразования (62) с вещественными ядрами можно заменить одним с комплексным ядром $e^{-is\zeta}$. Такое преобразование, рассмотренное в следующем параграфе, есть преобразование Фурье. Заменить два преобразования с вещественными ядрами одним с комплексным ядром можно и в других случаях, которые здесь нет возможности рассмотреть.

§ 5. Некоторые часто применяемые преобразования с бесконечными пределами

Формулы (64), (65) и формулы гл. XXXII позволяют получить ряд широко употребляемых интегральных преобразований.

I°. Синус-преобразование и косинус-преобразование Фурье. Пусть $0\leqslant\zeta<\infty$ — интервал изменения переменной преобразования и $f(\zeta)\in\mathscr{L}^2(0,\infty)$. Доопределим $f(\zeta)$ в интервале $(-\infty, 0)$ одним из соотношений $f(-\zeta)=-f(\zeta)$ или $f(-\zeta)=f(\zeta)$. В первом случае, ввиду нечетности $f(\zeta)$,

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^\infty f(\xi)\cos s\xi d\xi=0,\quad \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^\infty f(\xi)\sin s\xi d\xi=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty f(\xi)\sin s\xi d\xi.$$

Поэтому, ввиду (64), если выполнить интегральное преобразование функции $f(\zeta)$ с ядром $\frac{2}{\pi}\sin s\xi$ и весовой функцией $\rho=1$,