включающего оба преобразования (62).

Подставив (62) в (63) и положив $s^2=\lambda$, после простых преобразований получим *интегральную формулу Фурье:*

$$f(\zeta)=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \cos s\zeta ds \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\cos s\xi d\xi+$$
$$+\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \sin s\zeta ds \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\sin s\xi d\xi \qquad (64)$$

или, в более компактной форме,

$$f(\zeta)=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty ds \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\cos s(\zeta-\xi)\,d\xi.$$

С помощью тождества $\cos s(\zeta-\xi)=\frac{1}{2}e^{is(\zeta-\xi)}$, отсюда легко получить интегральную формулу Фурье в комплексной форме:

$$f(\zeta)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\zeta\xi}ds\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)e^{-is\xi}d\xi. \qquad (65)$$

Из формулы (65) следует, что в рассматриваемом случае два интегральных преобразования (62) с вещественными ядрами можно заменить одним с комплексным ядром $e^{-is\zeta}$. Такое преобразование, рассмотренное в следующем параграфе, есть преобразование Фурье. Заменить два преобразования с вещественными ядрами одним с комплексным ядром можно и в других случаях, которые здесь нет возможности рассмотреть.

§ 5. Некоторые часто применяемые преобразования с бесконечными пределами

Формулы (64), (65) и формулы гл. XXXII позволяют получить ряд широко употребляемых интегральных преобразований.

I°. Синус-преобразование и косинус-преобразование Фурье. Пусть $0\leqslant\zeta<\infty$ — интервал изменения переменной преобразования и $f(\zeta)\in\mathscr{L}^2(0,\infty)$. Доопределим $f(\zeta)$ в интервале $(-\infty, 0)$ одним из соотношений $f(-\zeta)=-f(\zeta)$ или $f(-\zeta)=f(\zeta)$. В первом случае, ввиду нечетности $f(\zeta)$,

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\cos s\xi d\xi=0,\quad \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\sin s\xi d\xi=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(\xi)\sin s\xi d\xi.$$

Поэтому, ввиду (64), если выполнить интегральное преобразование функции $f(\zeta)$ с ядром $\frac{2}{\pi}\sin s\xi$ и весовой функцией $\rho=1$, т. е. перейти к величинам

$$\bar{f}(s)=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty} f(\xi)\sin\xi d\xi, \tag{66}$$

то обратным будет преобразование

$$f(\zeta)=\int_{0}^{\infty}\bar{f}(s)\sin s\zeta ds, \quad \zeta>0. \tag{67}$$

Аналогично во втором случае, т. е. при четном доопределении $f(\zeta)$, найдем, что для преобразования

$$\bar{f}(s)=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty} f(\xi)\cos s\xi d\xi \tag{68}$$

обратным будет преобразование

$$f(\zeta)=\int_{0}^{\infty}\bar{f}(s)\cos s\zeta ds, \quad \zeta>0. \tag{69}$$

Преобразования (66) и (68) называют соответственно *синус-преобразованием и косинус-преобразованием Фурье*. Правая часть (67) при $\zeta<0$ равна $-f(|\zeta|)$, а правая часть (69) равна $f(|\zeta|)$.

2°. Преобразование Фурье. Если интервал изменения переменной преобразования $-\infty<\zeta<\infty$ и $f(\zeta)\in\mathscr{L}^2(-\infty, \infty)$, то, ввиду (65), для *преобразования Фурье*

$$\bar{f}(s)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)e^{-is\xi}d\xi \tag{70}$$

обратным будет преобразование

$$f(\zeta)=\int_{-\infty}^{\infty}\bar{f}(s)e^{is\zeta}ds. \tag{71}$$

Как упоминалось выше, преобразование Фурье (70) эквивалентно преобразованию с двумя вещественными ядрами, что очевидно из (64).

3°. Преобразование Лапласа. Пусть интервал изменения переменной преобразования есть $0\leqslant\zeta<\infty$. Рассмотрим функцию $f(\zeta)e^{-r\zeta}$, где r — положительное число, и доопределим ее при $\zeta<0$, положив $f(\zeta)=0$ при $\zeta<0$. Функция $f(\zeta)e^{-r\zeta}$, доопределенная указанным образом, при достаточно больших r принадлежит классу $\mathscr{L}^2(-\infty, \infty)$ даже тогда, когда функция $f(\zeta)$ растет экспоненциально при $\zeta\to\infty$. Подставив $f(\zeta)e^{-r\zeta}$ в (65) вместо $f(\zeta)$ и умножив обе части равенства на $e^{-r\zeta}$, придем к соотношению

$$f(\zeta)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{(r+is)\zeta}ds\int\limits_{0}^{\infty}f(\xi)\,e^{-(r+is)\xi}d\xi,\quad \zeta>0.$$

Введя подстановку $r+is=\gamma$, откуда $ds=\frac{d\gamma}{i}$, получим *формулу Лапласа—Меллина*

$$f(\zeta)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{r-i\infty}^{r+i\infty}e^{\gamma\zeta}d\gamma\int\limits_{0}^{\infty}f(\xi)\,e^{-\gamma\zeta}d\xi,\quad \zeta>0. \tag{72}$$

Поэтому, если

$$\overline{f}(s)=\int\limits_{0}^{\infty}f(\xi)\,e^{-s\xi}d\xi, \tag{73}$$

то

$$f(\zeta)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{r-i\infty}^{r+i\infty}\overline{f}(s)\,e^{s\zeta}ds,\quad \zeta>0. \tag{74}$$

Интегральное преобразование (73) называют *преобразованием Лапласа*, а обратное ему преобразование (74)—*формулой обращения Меллина.*

Ядра преобразований 1^0—3^0 удовлетворяют уравнению $u''=-\lambda u$, отсюда ясно, что они могут быть применены для исключения дифференциальных операций к дифференциальным выражениям вида u''. Однако область применения преобразований Фурье и Лапласа шире, поскольку показательная функция $e^{\eta\zeta}$, где η не зависит от ζ, удовлетворяет также дифференциальному уравнению

$$\sum_{\alpha=0}^{n}p_\alpha\frac{d^\alpha u}{d\zeta^\alpha}=u\sum_{\alpha=0}^{n}p_\alpha\eta^\alpha.$$

Если коэффициенты p_α не зависят от ζ, то правая часть этого уравнения имеет вид произведения u на число и, следовательно, интегральное преобразование с ядром, являющимся показательной функцией, может быть применено к дифференциальным выражениям вида $\sum\limits_{\alpha=0}^{n}p_\alpha u^{(\alpha)}$ с постоянными коэффициентами. Это используется в операционном исчислении. Преобразование Лапласа можно использовать также для исключения дифференцирования по переменной t в уравнении параболического типа вида (21). Действительно, ядро $e^{-s\zeta}$ преобразования Лапласа удовлетворяет уравнению (23). Следовательно, с помощью преобразования Лапласа уравнение (21) преобразуется к виду (26). Если решение u задачи, поставленной для уравнения (21), имеет при $t \to \infty$ не выше, чем экспоненциальный порядок роста по t, то при надлежащем выборе $\operatorname{Re} s = r$

$$[Ku]\Big|_0^\infty = [e^{-st}u]\Big|_0^\infty = u\,|_{t=0}$$

и преобразованное уравнение (26) примет вид

$$\hat{M}\bar{u} + s\bar{u} = \bar{f} + u|_{t=0}. \tag{75}$$

4°. Преобразование Меллина. Предположим, что функция $f(\zeta)$ в (72) равна нулю при $\zeta < 1$. Произведя в формуле (72) подстановки

$$\gamma = -\hat{\gamma},\ \ \zeta = \ln\hat{\zeta},\ \ \xi = \ln\hat{\xi},\ \ r = -\hat{r},\ \ f(\zeta) = \hat{f}(\hat{\zeta})$$

и опустив после проведения подстановок значки ^ над символами, получим *формулу Меллина*:

$$f(\zeta) = \frac{1}{2\pi i}\int_{r-i\infty}^{r+i\infty}\frac{d\gamma}{\zeta^\gamma}\int_0^\infty f(\xi)\,\xi^{\gamma-1}d\xi, \quad \zeta > 0. \tag{76}$$

Она справедлива, если число r выбрано так, что

$$\int_0^\infty |f(\xi)|^2\,\xi^{2r-1}d\xi < \infty. \tag{77}$$

Укажем еще, для простоты без доказательства, удобное достаточное условие, при котором справедлива формула Меллина: существуют числа η_1 и η_2, такие, что при $\eta_1 < r < \eta_2$ интеграл $\int\limits_{r-i\infty}^{r+i\infty} |\bar{f}(s)|\,ds < \infty$, а функция $\bar{f}(r+i\chi)$ аналитична и при $\chi \to \pm\infty$ равномерно стремится к нулю.

В силу (76), при условии (77) из

$$\bar{f}(s) = \int_0^\infty f(\zeta)\,\zeta^{s-1}d\zeta \tag{78}$$

следует, что

$$f(\zeta) = \frac{1}{2\pi i}\int_{r-i\infty}^{r+i\infty}\bar{f}(s)\,\zeta^{-s}ds. \tag{79}$$

Интегральное преобразование (78) называют *преобразованием Меллина*. Оно может быть использовано для исключения из дифференциального уравнения выражений вида:

$$M_j u = \zeta^2 u'' + \zeta u'.$$

5°. Интегральное преобразование с ядром

$$K(\zeta, \lambda)=\frac{J_\nu(s\zeta)Y_\nu(sa)-J_\nu(sa)Y_\nu(s\zeta)}{\sqrt{J_\nu^2(sa)+Y_\nu^2(sa)}}, \quad s=\sqrt{\lambda}, \quad a>0. \tag{80}$$

Из разложения (101) предыдущей главы следует, что при условии

$$\int_a^\infty |f(\zeta)|^2\zeta d\zeta<\infty$$

существует интегральное преобразование

$$\bar{f}(s)=\int_a^\infty f(\zeta)K(\zeta, s^2)\zeta d\zeta, \quad a>0, \tag{81}$$

обратным для которого является преобразование

$$f(\zeta)=\int_0^\infty \bar{f}(s)K(\zeta, s^2)s ds, \quad \zeta>a. \tag{82}$$

Отметим, что множитель s под знаком интеграла в правой части (82) появился потому, что за переменную интегрирования выбрана величина $s=\sqrt{\lambda}$, а не λ.

6°. Преобразование Ханкеля следует из интегральной формулы Ханкеля

$$f(\zeta)=\int_0^\infty J_\nu(s\zeta)s ds\int_0^\infty f(\xi)J_\nu(s\xi)\xi d\xi, \tag{83}$$

вывод которой для функций $f(\zeta)$, удовлетворяющих условию

$$\int_0^\infty |f(\zeta)|^2\zeta d\zeta<\infty,$$

содержится в п. 4 § 10 предыдущей главы для $\nu\geqslant 0$ $\left(\text{фактически формула (83) справедлива для } \nu>-\frac{1}{2}\right)$. Положив

$$\bar{f}(s)=\int_0^\infty f(\zeta)J_\nu(s\zeta)\zeta d\zeta, \tag{84}$$

в силу (83), получим

$$f(\zeta)=\int_0^\infty \bar{f}(s)J_\nu(s\zeta)s ds. \tag{85}$$

Интегральное преобразование (84) по переменной, изменяющейся в интервале $0<\zeta<\infty$, называют *преобразованием Ханкеля.*