Глава XXXIV

ПРИМЕРЫ ПРИМЕНЕНИЯ КОНЕЧНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

§ 1. Колебания тяжелой нити

В качестве первого примера применения конечных интегральных преобразований рассмотрим задачу Даниила Бернулли о колебании тяжелой нити.

Дифференциальное уравнение малых колебаний однородной нерастяжимой тяжелой нити, подвешенной за верхний конец, имеет вид (гл. XIV, § 2):

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(x\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{X}{gd}=\frac{1}{g}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \tag{1}$$

где d — линейная плотность нити, $X=X(x, t)$ — удельная поперечная нагрузка нити, u — отклонение нити от положения равновесия. Ось x предполагается направленной вдоль нити вверх. Выбрав начало координат в точке, совпадающей с положением равновесия нижнего конца нити, граничное условие можно записать в виде:

$$u\,|_{x=0}<\infty,\ \ u\,|_{x=l}=0, \tag{2}$$

где l — длина нити.

Начальное условие в общем случае имеет вид

$$u\,|_{t=0}=u_0(x),\quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=u_1(x), \tag{3}$$

где $u_0(x)$ и $u_1(x)$ — известные функции.

Поставим целью найти интегральное преобразование, позволяющее исключить дифференциальные операции по x.

Положим

$$M_x u\equiv\frac{\partial}{\partial x}\left(x\frac{\partial u}{\partial x}\right).$$

Для этого выражения *:

$$a_{xx}=x,\ b_x=1,\ c=0,\ p(x)=x,\ \rho(x)=1,\ q(x)=0.$$

Ядро преобразования является решением граничной задачи:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(x\frac{\partial K}{\partial x}\right)+\lambda^2 K=0, \tag{4}$$

$$K\,|_{x=0}<\infty,\quad K\,|_{x=l}=0. \tag{5}$$

* Все обозначения соответствуют обозначениям, принятым в § 3 предыдущей главы, с очевидным изменением индекса.

С помощью подстановки

$$z = 2x^{\frac{1}{2}} \tag{6}$$

уравнение (4) приведем к уравнению Бесселя нулевого порядка

$$\frac{\partial^2 K}{\partial z^2} + \frac{1}{z}\frac{\partial K}{\partial z} + \lambda^2 K = 0.$$

Его решениями, ограниченными при $z=0$, являются функции Бесселя $J_0(\lambda z)$. Следовательно, функции $J_0\left(\mu_\gamma x^{\frac{1}{2}}\right)$, где положено $\mu_\gamma = 2\lambda_\gamma$, представят ограниченные при $x=0$ решения уравнения (4). Чтобы удовлетворить второму из граничных условий (5), положим:

$$J_0\left(\mu_\gamma l^{\frac{1}{2}}\right) = 0. \tag{7}$$

Корни μ_γ этого уравнения и определят набор собственных чисел задачи (4)—(5).

Ядро преобразования, нормированное в соответствии с (37) предыдущей главы,

$$K(x, \gamma) = \frac{1}{C_\gamma} J_0\left(\mu_\gamma x^{\frac{1}{2}}\right), \tag{8}$$

где

$$C_\gamma = \int_0^a \left[J_0\left(\mu_\gamma x^{\frac{1}{2}}\right)\right]^2 dx.$$

Для вычисления C_γ воспользуемся формулой (38) гл. XIII, согласно которой

$$\int_0^a z J_0^2(\lambda z)\, dz = \frac{a^2}{2} J_1^2(\lambda a).$$

Положив здесь $a = l$, $z = 2x^{\frac{1}{2}}$ и $\lambda = \frac{1}{2}\mu_\gamma$, получим:

$$C_\gamma = l J_1^2\left(\mu l^{\frac{1}{2}}\right).$$

Осуществив интегральное преобразование с ядром (8) и интервалом интегрирования $(0, l)$ и приняв во внимание, что $\lambda_\gamma = \frac{1}{2}\mu_\gamma$, преобразуем задачу (1)—(3) к виду*

$$\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2} + \frac{g}{2}\mu_\gamma \bar{u} = \frac{\overline{X}}{d}, \tag{9}$$

* Вид преобразованного уравнения дается формулой (20) гл. XXXIII. Поэтому для записи преобразованной задачи нет необходимости в фактическом выполнении всех выкладок, связанных с преобразованием, а следует использовать указанную формулу.

$$\bar{u}|_{t=0}=\bar{u}_0(\gamma), \quad \left.\frac{\partial \bar{u}}{\partial t}\right|_{t=0}=\bar{u}_1(\gamma), \tag{10}$$

где

$$\bar{u}=\bar{u}(\gamma,\ t)=\frac{1}{C_\gamma}\int_0^l u(x,\ t)\,J_0\left(\mu_\gamma x^{\frac{1}{2}}\right)dx,$$

$$\bar{X}=\bar{X}(\gamma,\ t)=\frac{1}{C_\gamma}\int_0^l X(x,\ t)\,J_0\left(\mu_\gamma x^{\frac{1}{2}}\right)dx,$$

$$\bar{u}_0(\gamma)=\frac{1}{C_\gamma}\int_0^l u_0(x)\,J_0\left(\mu_\gamma x^{\frac{1}{2}}\right)dx,$$

$$\bar{u}_1(\gamma)=\frac{1}{C_\gamma}\int_0^l u_1(x)\,J_0\left(\mu_\gamma x^{\frac{1}{2}}\right)dx.$$

Решение задачи (9)—(10) при данном значении γ обозначим через $\bar{u}_\gamma$. При этом решение $u(x,\ t)$ задачи (1)—(3) можем записать в виде ряда

$$u(x,\ t)=\sum_{\gamma=1}^{\infty}\bar{u}_\gamma J_0\left(\mu_\gamma x^{\frac{1}{2}}\right).$$

Читатель найдет для себя поучительным вычислить выражения для $\bar{u}_\gamma$ в различных частных случаях.

ЗАДАЧИ

1. Показать, что свободные ($X=0$) колебания тяжелой нити при начальных условиях (3) могут быть представлены в виде ряда

$$u(x,\ t)=\sum_{\gamma=1}^{\infty} J_0\left(\mu_\gamma x^{\frac{1}{2}}\right)\left(A_\gamma \cos\frac{\mu_\gamma g^{\frac{1}{2}}}{2}\,t+B_\gamma\frac{2}{g^{\frac{1}{2}}\mu_\gamma}\sin\frac{\mu_\gamma g^{\frac{1}{2}}}{2}\,t\right),$$

где

$$A_\gamma=\frac{1}{l}\,\frac{1}{J_1^2\left(\mu_\gamma l^{\frac{1}{2}}\right)}\int_0^l u_0(\xi)\,J_0\left(\mu_\gamma \xi^{\frac{1}{2}}\right)d\xi,$$

$$B_\gamma=\frac{1}{l}\,\frac{1}{J_1^2\left(\mu_\gamma l^{\frac{1}{2}}\right)}\int_0^l u_1(\xi)\,J_0\left(\mu_\gamma \xi^{\frac{1}{2}}\right)d\xi.$$

2. Показать, что вынужденные колебания тяжелой нити под действием силы $F(t)$, сосредоточенной в точке $x=a(0\leqslant a\leqslant 1)$, при нулевых начальных условиях могут быть представлены в виде ряда

$$u(x, t) = \frac{1}{ldg^{\frac{1}{2}}} \sum_{\gamma=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_\gamma} \frac{J_0\left(\mu_\gamma a^{\frac{1}{2}}\right)}{J_1^2\left(\mu_\gamma l^{\frac{1}{2}}\right)} J_0\left(\mu_\gamma x^{\frac{1}{2}}\right) \int_{-\infty}^{t} F(\zeta) \sin \frac{\mu_\gamma g^{\frac{1}{2}}}{2} (t-\zeta)\, d\zeta.$$

Указание. Сосредоточенную силу следует рассматривать как предельный случай силы, равномерно распределенной на участке нити $(a-\eta,\ a+\eta)$. При переходе к пределу $\eta=0$ принять во внимание соотношение

$$\frac{d}{dz} J_1(z) = J_0(z) - \frac{1}{z} J_1(z).$$

3. Показать, что в условиях предыдущей задачи при $F(t)=F_0 \sin \omega t$

$$u(x, t) = \frac{F_0}{dl\omega^2} \sum_{\gamma=1}^{\infty} \frac{1}{J_1^2\left(\mu_\gamma l^{\frac{1}{2}}\right)} \frac{1}{\frac{\mu_\gamma^2 g}{4\omega^2} - 1} J_0\left(\mu_\gamma x^{\frac{1}{2}}\right) \left(\sin \omega t - \frac{2\omega}{\mu_\gamma g^{\frac{1}{2}}} \sin \frac{\mu_\gamma g^{\frac{1}{2}}}{2} t \right).$$

Особо рассмотреть случай резонанса, когда при некотором γ имеет место равенство

$$\omega = \frac{\mu_\gamma g^{\frac{1}{2}}}{2}.$$

Показать, что в этом случае в разложении $u(x, t)$ появляется член, возрастающий с течением времени t как t^3.

§ 2. Колебания мембраны

Рассмотрим задачу о малых колебаниях прямоугольной мембраны, закрепленной на краях.

Дифференциальное уравнение малых колебаний плоской однородной мембраны имеет вид (гл. VIII, § 1)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{Z(x_1, x_2, t)}{T}, \tag{11}$$

где u — смещение мембраны из положения равновесия, $Z(x_1, x_2, t)$ — давление, оказываемое на мембрану, T — натяжение мембраны. Плоскость, в которой лежит мембрана в положении равновесия, предполагается совпадающей с плоскостью x_1, x_2. Выбрав начало координат в вершине одного из углов мембраны и направив оси x_1 и x_2 вдоль исходящих из этой вершины сторон, запишем граничные условия в форме

$$u|_{x_1=a} = u|_{x_1=0} = u|_{x_2=b} = u|_{x_2=0} = 0, \tag{12}$$

где a и b — длины сторон мембраны. Начальные условия примем в общей форме:

$$u|_{t=0} = u_0(x_1, x_2), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = u_1(x_1, x_2). \tag{13}$$