условиях могут быть представлены в виде ряда

$$u(x, t)=\frac{1}{ldg^{\frac{1}{2}}}\sum_{\gamma=1}^{\infty}\frac{1}{\mu_\gamma}\frac{J_0\left(\mu_\gamma a^{\frac{1}{2}}\right)}{J_1^2\left(\mu_\gamma l^{\frac{1}{2}}\right)}J_0\left(\mu_\gamma x^{\frac{1}{2}}\right)\int_{-\infty}^{t}F(\zeta)\sin\frac{\mu_\gamma g^{\frac{1}{2}}}{2}(t-\zeta)\,d\zeta.$$

Указание. Сосредоточенную силу следует рассматривать как предельный случай силы, равномерно распределенной на участке нити $(a-\eta,\ a+\eta)$. При переходе к пределу $\eta=0$ принять во внимание соотношение

$$\frac{d}{dz}J_1(z)=J_0(z)-\frac{1}{z}J_1(z).$$

3. Показать, что в условиях предыдущей задачи при $F(t)=F_0\sin\omega t$

$$u(x, t)=\frac{F_0}{dl\omega^2}\sum_{\gamma=1}^{\infty}\frac{1}{J_1^2\left(\mu_\gamma l^{\frac{1}{2}}\right)}\frac{1}{\frac{\mu_\gamma^2 g}{4\omega^2}-1}J_0\left(\mu_\gamma x^{\frac{1}{2}}\right)\left(\sin\omega t-\frac{2\omega}{\mu_\gamma g^{\frac{1}{2}}}\sin\frac{\mu_\gamma g^{\frac{1}{2}}}{2}t\right).$$

Особо рассмотреть случай резонанса, когда при некотором γ имеет место равенство

$$\omega=\frac{\mu_\gamma g^{\frac{1}{2}}}{2}.$$

Показать, что в этом случае в разложении $u(x, t)$ появляется член, возрастающий с течением времени t как t^3.

§ 2. Колебания мембраны

Рассмотрим задачу о малых колебаниях прямоугольной мембраны, закрепленной на краях.

Дифференциальное уравнение малых колебаний плоской однородной мембраны имеет вид (гл. VIII, § 1)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\frac{Z(x_1,\ x_2,\ t)}{T}, \qquad (11)$$

где u — смещение мембраны из положения равновесия, $Z(x_1, x_2, t)$ — давление, оказываемое на мембрану, T — натяжение мембраны. Плоскость, в которой лежит мембрана в положении равновесия, предполагается совпадающей с плоскостью x_1, x_2. Выбрав начало координат в вершине одного из углов мембраны и направив оси x_1 и x_2 вдоль исходящих из этой вершины сторон, запишем граничные условия в форме

$$u\,|_{x_1=a}=u\,|_{x_1=0}=u\,|_{x_2=b}=u\,|_{x_2=0}=0, \qquad (12)$$

где a и b — длины сторон мембраны. Начальные условия примем в общей форме:

$$u\,|_{t=0}=u_0(x_1,\ x_2),\quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=u_1(x_1,\ x_2). \qquad (13)$$

Нам надо найти решение задачи (11)—(13) в прямоугольнике

$$0 \leqslant x_1 \leqslant a, \quad 0 \leqslant x_2 \leqslant b.$$

Применим интегральное преобразование дважды, чтобы исключить дифференциальные операции по координатам x_1 и x_2.

Положим

$$\mathscr{M}_1 u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}.$$

Для отыскания ядра преобразования $\overline{K}$ придем к граничной задаче:

$$\frac{\partial^2 \overline{K}}{\partial x_1^2} + \lambda^2 \overline{K} = 0, \tag{14}$$

$$\overline{K}\big|_{x_1=0} = \overline{K}\big|_{x_1=a} = 0, \tag{15}$$

нормированным решением которой служит функция

$$\frac{1}{\pi} \sin \lambda_\gamma x_1 \quad \text{при} \quad \lambda_\gamma = \frac{\pi}{a}\gamma \quad (\gamma = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots).$$

С помощью интегрального преобразования в интервале $0 \leqslant x_1 \leqslant a$ с ядром $\frac{1}{\pi} \sin \frac{\pi}{a} \gamma x_1$ преобразуем задачу (11)—(13) к виду:

$$\frac{\partial^2 \overline{u}}{\partial x_2^2} - \lambda_\gamma^2 \overline{u} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \overline{u}}{\partial t^2} - \frac{\overline{Z}(\gamma,\ y,\ t)}{T}, \tag{16}$$

$$\overline{u}\big|_{x_2=0} = \overline{u}\big|_{x_2=b} = 0, \tag{17}$$

$$\overline{u}\big|_{t=0} = \overline{u}_0(\gamma,\ x_2), \quad \frac{\partial \overline{u}}{\partial t}\bigg|_{t=0} = \overline{u}_1(\gamma,\ x_2), \tag{18}$$

где, по принятому соглашению, чертой над символом обозначен переход от исходных величин к их интегральным преобразованиям с рассматриваемым ядром.

Чтобы исключить дифференциальные операции также и по переменной x_2, положим

$$\mathscr{M}_2 u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}.$$

Для отыскания подходящего преобразования придем к задаче, совершенно аналогичной задаче (14)—(15), вследствие чего ядро $\tilde{K}$ прямого преобразования будет иметь вид $\frac{1}{\pi} \sin \mu_\eta x_2$, а собственные числа μ_η определятся выражением: $\mu_\eta = \frac{\pi}{b} \eta \; (\eta = 1, 2, 3, \ldots)$. Осуществив в пределах $0 \leqslant x_2 \leqslant b$ преобразование с ядром

$\frac{1}{\pi}\sin\mu_\eta x_2$, приведем задачу (16)—(18) к виду

$$\frac{1}{c^2}\frac{d^2\tilde{u}}{dt^2}+(\lambda_\gamma^2+\mu_\eta^2)\tilde{u}=\frac{\tilde{Z}(\gamma,\ \eta,\ t)}{T}, \tag{19}$$

$$\tilde{u}\Big|_{t=0}=\tilde{u}_0(\gamma,\ \eta),\quad \frac{d\tilde{u}}{dt}\Big|_{t=0}=\tilde{u}_1(\gamma,\ \eta), \tag{20}$$

где

$$\tilde{u}=\tilde{u}(\gamma,\ \eta,\ t)=\frac{1}{\pi^2}\int_0^a\int_0^b u(x_1,\ x_2,\ t)\sin\frac{\pi}{a}\gamma x_1\sin\frac{\pi}{b}\eta x_2\,dx_1\,dx_2,$$

$$\tilde{Z}=\tilde{Z}(\gamma,\ \eta,\ t)=\frac{1}{\pi^2}\int_0^a\int_0^b Z(x_1,\ x_2,\ t)\sin\frac{\pi}{a}\gamma x_1\sin\frac{\pi}{b}\eta x_2 dx_1 dx_2,$$

и аналогичными формулами определяются величины $\tilde{u}_0$ и $\tilde{u}_1$.

Таким образом, путем двукратного применения интегрального преобразования задачу (11)—(13) мы привели к задаче для обыкновенного дифференциального уравнения (19). Обозначив решение этого последнего при начальных условиях (20) через $\tilde{u}_{\gamma\eta}(t)$, на основании общего выражения для обратного преобразования, представим решение $\bar{u}_\gamma(x_2,\ t)$ задачи (16)—(18) в виде ряда

$$\bar{u}_\gamma(x_2,\ t)=\sum_{\eta=1}^{\infty}\tilde{u}_{\gamma\eta}(t)\tilde{K}(x_2,\eta)=\sum_{\eta=1}^{\infty}\tilde{u}_{\gamma\eta}(t)\sin\frac{\pi}{b}\eta x_2.$$

Осуществив обратное преобразование второй раз, получим решение исходной задачи (11)—(13):

$$u(x_1,\ x_2,\ t)=\sum_{\gamma=1}^{\infty}\bar{u}_\gamma(x_2,\ t)\overline{K}_\gamma(x_1)=\sum_{\gamma,\ \eta=1}^{\infty}\tilde{u}_{\gamma\eta}(t)\overline{K}_\gamma(x_1)\tilde{K}_\eta(x_2)=$$

$$=\sum_{\gamma,\ \eta=1}^{\infty}\tilde{u}_{\gamma\eta}(t)\sin\frac{\pi}{a}\gamma x_1\sin\frac{\pi}{b}\eta x_2.$$

ЗАДАЧИ

1. Показать, что малые свободные колебания прямоугольной однородной мембраны можно представить в форме ряда

$$u(x_1,\ x_2,\ t)=\frac{1}{4ab}\sum_{\gamma=1}^{\infty}\sum_{\delta=1}^{\infty}\sin\frac{\pi}{a}\gamma x_1\sin\frac{\pi}{b}\delta x_2\,(A_{\gamma\delta}\cos\mu_{\gamma\delta}t+B_{\gamma\delta}\sin\mu_{\gamma\delta}t),$$

где

$$A_{\gamma\delta}=\int_0^a\int_0^b u_0(x_1,\ x_2)\sin\frac{\pi}{a}\gamma x_1\sin\frac{\pi}{b}\delta x_2\,dx_1\,dx_2,$$

$$B_{\gamma\delta}=\int_0^a\int_0^b u_1(x_1,\ x_2)\sin\frac{\pi}{a}\gamma x_1\sin\frac{\pi}{b}\delta x_2\,dx_1\,dx_2.$$

2. Показать, что малые вынужденные колебания симметрично нагруженной однородной круглой мембраны радиуса a с жестко закрепленным контуром в полярной системе координат можно представить в форме ряда

$$u(r, t) = \sum_{\gamma=1}^{\infty} \overline{u}(\gamma, t) J_0(\lambda_\gamma, r),$$

где $\overline{u}(\gamma, t)$ — решение обыкновенного дифференциального уравнения

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \overline{u}}{\partial t^2} + \lambda_\gamma^2 \overline{u} = \frac{\overline{Z}(\gamma, t)}{T}$$

при нулевых начальных условиях, λ_γ — положительные корни уравнения

$$J_0(\lambda_\gamma a) = 0,$$

перенумерованные в порядке их возрастания, а черта над символами указывает на выполнение над соответствующей величиной интегрального преобразования в пределах от 0 до a с ядром

$$\frac{2}{a^2} \frac{1}{J_1^2(\lambda_\gamma a)} r J_0(\lambda_\gamma r).$$

Величины $Z(r, t)$ и T — соответственно давление на мембрану и ее натяжение.

§ 3. Распределение тепла в цилиндрическом стержне

Рассмотрим задачу об остывании однородного цилиндрического стержня с круговым сечением радиуса a. Теплоотдачей с торцов стержня будем пренебрегать, а начальное распределение температуры в любом из его сечений и условия теплоотдачи по длине стержня считать одинаковыми. При этих предположениях распределение тепла описывается в полярных координатах r, φ уравнением (гл. XXVIII, § 3)

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} = \frac{1}{k} \frac{\partial T}{\partial t}, \tag{21}$$

где T — температура стержня, а k — коэффициент температуропроводности *. Начало полярных координат предполагается лежащим на оси стержня.

Будем считать, что с поверхности стержня происходит излучение в среду с нулевой температурой. При этом граничные условия по r будут иметь вид **

$$T|_{r=0} < \infty, \quad \left[\frac{\partial T}{\partial r} + hT\right]_{r=a} = 0, \tag{22}$$

а по φ, очевидно, должно соблюдаться условие периодичности:

$$T|_{\varphi=0} = T|_{\varphi=2\pi}. \tag{23}$$

---

* В гл. XXVIII коэффициент температуропроводности был обозначен через a^2.

** Условие при $r=0$ связано не с физическим содержанием задачи, а с тем, что точка $r=0$ является в полярной системе координат особой.