2. Показать, что малые вынужденные колебания симметрично нагруженной однородной круглой мембраны радиуса $a$ с жестко закрепленным контуром в полярной системе координат можно представить в форме ряда

$$u(r,\ t)=\sum_{\gamma=1}^{\infty}\overline{u}(\gamma,\ t)\,J_0(\lambda_\gamma,\ r),$$

где $\overline{u}(\gamma,\ t)$ — решение обыкновенного дифференциального уравнения

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\overline{u}}{\partial t^2}+\lambda_\gamma^2\overline{u}=\frac{\overline{Z}(\gamma,\ t)}{T}$$

при нулевых начальных условиях, $\lambda_\gamma$ — положительные корни уравнения

$$J_0(\lambda_\gamma a)=0,$$

перенумерованные в порядке их возрастания, а черта над символами указывает на выполнение над соответствующей величиной интегрального преобразования в пределах от 0 до $a$ с ядром

$$\frac{2}{a^2}\frac{1}{J_1^2(\lambda_\gamma a)}\,rJ_0(\lambda_\gamma r).$$

Величины $Z(r,\ t)$ и $T$ — соответственно давление на мембрану и ее натяжение.

## § 3. Распределение тепла в цилиндрическом стержне

Рассмотрим задачу об остывании однородного цилиндрического стержня с круговым сечением радиуса $a$. Теплоотдачей с торцов стержня будем пренебрегать, а начальное распределение температуры в любом из его сечений и условия теплоотдачи по длине стержня считать одинаковыми. При этих предположениях распределение тепла описывается в полярных координатах $r$, $\varphi$ уравнением (гл. XXVIII, § 3)

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 T}{\partial\varphi^2}=\frac{1}{k}\frac{\partial T}{\partial t}, \tag{21}$$

где $T$ — температура стержня, а $k$ — коэффициент температуропроводности *. Начало полярных координат предполагается лежащим на оси стержня.

Будем считать, что с поверхности стержня происходит излучение в среду с нулевой температурой. При этом граничные условия по $r$ будут иметь вид **

$$T\,|_{r=0}<\infty,\quad \left[\frac{\partial T}{\partial r}+hT\right]_{r=a}=0, \tag{22}$$

а по $\varphi$, очевидно, должно соблюдаться условие периодичности:

$$T\,|_{\varphi=0}=T\,|_{\varphi=2\pi}. \tag{23}$$

---

* В гл. XXVIII коэффициент температуропроводности был обозначен через $a^2$.

** Условие при $r=0$ связано не с физическим содержанием задачи, а с тем, что точка $r=0$ является в полярной системе координат особой.

Начальное условие возьмем в форме

$$T\,|_{t=0}=f(r,\ \varphi). \tag{24}$$

Применим интегральные преобразования, чтобы исключить дифференциальные операции по $\varphi$ и по $r$.

Начнем с переменной $\varphi$. Положим

$$\mathscr{M}_{\varphi}T=\frac{\partial^2 T}{\partial\varphi^2}\,.$$

Ядро преобразования, которое обозначим через $\overline{K}_{\gamma}(\varphi)$, должно удовлетворять дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial^2\overline{K}}{\partial\varphi^2}+\mu^2\overline{K}=0 \tag{25}$$

и условию периодичности

$$\overline{K}\,|_{\varphi=0}=\overline{K}\,|_{\varphi=2\pi}. \tag{26}$$

Как мы упоминали, условие периодичности может повлечь за собой двукратное вырождение собственных чисел, т. е. каждому из них могут соответствовать две линейно независимые собственные функции. Взаимно ортогональными линейно-независимыми нормированными решениями задачи (25)—(26) являются функции $\frac{1}{\pi}\cos\mu\varphi$ и $\frac{1}{\pi}\sin\mu\varphi$ при $\mu=m=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$.

Положим

$$\overline{K}_{2m-1}(\varphi)=\frac{1}{\pi}\sin m\varphi,\quad \overline{K}_{2m}(\varphi)=\frac{1}{\pi}\cos m\varphi. \tag{27}$$

Осуществив в интервале $0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi$ преобразование с этим ядром и приняв во внимание, что значению $\gamma=2m$ и значению $\gamma=2m-1$ соответствует одно и то же собственное число $m^2$, приведем задачу (21)—(24) к виду:

$$\frac{\partial^2\overline{T}}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\overline{T}}{\partial r}-\frac{m^2}{r^2}\overline{T}=\frac{1}{k}\frac{\partial\overline{T}}{\partial t}\,, \tag{28}$$

$$\overline{T}\,|_{r=0}<\infty,\quad \left[\frac{\partial\overline{T}}{\partial r}+h\overline{T}\right]_{r=a}=0, \tag{29}$$

$$\overline{T}\,|_{t=0}=\begin{cases}\overline{f}_{2m}(r),\\ \overline{f}_{2m-1}(r),\end{cases} \tag{30}$$

где

$$\overline{T}=\int_0^{2\pi}T(r,\ \varphi,\ t)\overline{K}_{\gamma}(\varphi)\,d\varphi,\quad f_{\gamma}(r)=\int_0^{2\pi}f(r,\ \varphi)\overline{K}_{\gamma}(\varphi)\,d\varphi,\quad \gamma=\begin{cases}2m,\\ 2m-1.\end{cases}$$

Ввиду наличия двух различных начальных условий (30) каждому значению $m$ соответствуют два различных решения уравнения (28). Эти решения обозначим через $\overline{T}_{2m}$ и $\overline{T}_{2m-1}$ соответственно.

Чтобы исключить дифференциальные операции по $r$, положим

$$\mathscr{M}_r\overline{T} \equiv \frac{\partial^2\overline{T}}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\overline{T}}{\partial r} - \frac{m^2}{r^2}\overline{T}.$$

В этом дифференциальном выражении

$$a_{rr} = 1,\ b_r = \frac{1}{r},\ c = -\frac{m^2}{r^2},$$

откуда

$$\rho(r) \equiv e^{-\int \frac{1}{a_{rr}}\left(\frac{da_{rr}}{dr} - b_r\right) dr} = r,$$

$$p(r) \equiv a_{rr}\rho(r) = r,$$

$$q(r) \equiv c\rho(r) = \frac{m^2}{r}.$$

Ядро преобразования $\tilde{K}_\eta(r)$ должно удовлетворять уравнению

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\tilde{K}}{\partial r}\right) - \frac{m^2}{r}\tilde{K} + \lambda^2 r\tilde{K} = 0,$$

приводящемуся путем деления на $r$ к уравнению Бесселя

$$\frac{\partial^2\tilde{K}}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\tilde{K}}{\partial r} + \left(\lambda^2 - \frac{m^2}{r^2}\right)\tilde{K} = 0\ , \tag{31}$$

и граничным условиям

$$\tilde{K}\,|_{r=0} < \infty,\ \left[\frac{\partial\tilde{K}}{\partial r} + h\tilde{K}\right]_{r=a} = 0. \tag{32}$$

Ограниченными при $r=0$ решениями уравнения (31) являются функции Бесселя $J_m(\lambda r)$. Подставив функцию $J_m(\lambda r)$ во второе из условий (32), придем к уравнению

$$\lambda_{m\eta}J'_m(\lambda_{m\eta}a) + hJ_m(\lambda_{m\eta}a) = 0,$$

корни которого $\lambda_{m\eta}$ определяют собственные числа $\lambda^2_{m\eta}$ задачи (31)—(32).

Положим $\tilde{K}_\eta(r) = \frac{1}{C_{m\eta}}J_m(\lambda_{m\eta}r)$, где $C^{-1}_{m\eta}$ — нормирующий множитель. С помощью формулы (41) гл. XIII найдем, что

$$C_{m\eta} \equiv \int_0^a r\,[J_m(\lambda_{m\eta}r)]^2\,dr = \frac{1}{2\lambda^2_{m\eta}}(a^2h^2 + a^2\lambda^2_{m\eta} - m^2)\,J^2_m(\lambda_{m\eta}a).$$

Выполнив в интервале $0 \leqslant r \leqslant a$ интегральное преобразование с ядром $\frac{1}{C_{m\eta}}J_m(\lambda_{m\eta}r)$ и весовой функцией $\rho = r$, приведем задачу (28)—(30) к виду:

$$\frac{d\tilde{T}}{dt} + k\lambda^2_{m\eta}\tilde{T} = 0, \tag{33}$$

$$\tilde{T}\,|_{t=0} = \begin{cases} \overline{f}_{2m,\,\eta}, \\ \overline{f}_{2m-1,\,\eta}, \end{cases} \tag{34}$$

где

$$\tilde{T} = \frac{1}{C_{m\eta}} \int_0^a \bar{T}(r,\ m)\, r J_m(\lambda_{m\eta} r)\, dr,$$

$$f_{m\eta} = \frac{1}{C_{m\eta}} \int_0^a f_\gamma(r)\, r J_m(\lambda_{m\eta} r)\, dr, \quad \gamma = \begin{cases} 2m, \\ 2m-1. \end{cases}$$

Решением задачи (33)—(34) является функция

$$\tilde{T}_{\gamma\eta} = f_{\gamma\eta} e^{-k\lambda_{m\eta}^2 t}, \quad \gamma = \begin{cases} 2m, \\ 2m-1. \end{cases}$$

Осуществив обратные преобразования, получим:

$$\bar{T}_\gamma(r,\ t) = \sum_{\eta=1}^{\infty} f_{\gamma\eta} J_m(\lambda_{m\eta} r)\, e^{-k\lambda_{m\eta}^2 t}, \quad \gamma = \begin{cases} 2m, \\ 2m-1, \end{cases}$$

$$T(r,\ \varphi,\ t) = \sum_{m=1}^{\infty} (\bar{T}_{2m}\bar{K}_{2m} + \bar{T}_{2m-1}\bar{K}_{2m-1}) =$$

$$= \sum_{m,\ \eta=1}^{\infty} J_m(\lambda_{m\eta} r)\, e^{-k\lambda_{m\eta}^2 t} (f_{2m,\ \eta} \cos m\varphi + f_{2m-1,\ \eta} \sin m\varphi).$$

Это и есть искомое решение задачи (21)—(24) в форме двойного ряда.

## ЗАДАЧИ

1. Показать, что решение рассмотренной выше задачи о распространении тепла в стержне при симметричном начальном распределении температуры ($T|_{t=0} = f(r)$) может быть представлено в форме ряда

$$T(r,\ t) = \sum_{\gamma=1}^{\infty} f_\gamma J_0(\lambda_\gamma r)\, e^{-k\lambda_\gamma^2 t},$$

где

$$f_\gamma \equiv \frac{2\lambda_\gamma^2}{a^2\left(h^2 + \lambda_\gamma^2\right)} \frac{1}{J_0^2(\lambda_\gamma a)} \int_0^a f(r)\, r J_0(\lambda_\gamma r)\, dr,$$

а $\lambda_\gamma$ — положительные корни уравнения

$$hJ_0(\lambda a) - \lambda J_1(\lambda a) = 0,$$

перенумерованные в порядке их возрастания.

2. Показать, что если поверхность стержня поддерживается при постоянной температуре $T = 0$, то при сохранении остальных условий задачи 1 распределение температуры в стержне в момент времени $t$ дается формулой

$$T(r,\ t) = \sum_{\gamma=1}^{\infty} f_\gamma J_0(\lambda_\gamma r)\, e^{-k\lambda_\gamma^2 t},$$

где

$$f_\gamma = \frac{2}{a^2} \frac{1}{J_1^2(\lambda_\gamma a)} \int_0^a f(r)\, r J_0(\lambda_\gamma r)\, dr,$$

а $\lambda_\gamma$ — положительные корни уравнения $J_0(\lambda a)=0$, перенумерованные в порядке их возрастания.

**3.** Путем повторного применения интегральных преобразований решить задачу о распространении тепла в прямоугольном параллелепипеде $0 \leqslant x_1 \leqslant a$, $0 \leqslant x_2 \leqslant b$, $0 \leqslant x_3 \leqslant c$ при начальном условии

$$T|_{t=0} = f(x_1, x_2, x_3),$$

если при $t > 0$ его грани поддерживаются при постоянной температуре.

Указание. Уравнение теплопроводности записать в прямоугольных декартовых координатах и последовательно исключить дифференциальные операции по $x_1$, $x_2$, $x_3$ аналогично тому, как это было сделано в § 2.

*Ответ*:

$$T = \frac{8}{abc} \sum_{m,\,n,\,s=1}^{\infty} f_{mns} e^{-k\mu_{mns} t} \sin\frac{\pi}{a} m x_1 \sin\frac{\pi}{b} n x_2 \sin\frac{\pi}{c} s x_3,$$

где

$$f_{mns} \equiv \int_0^a\int_0^b\int_0^c f(x_1, x_2, x_3) \sin\frac{\pi}{a} m x_1 \sin\frac{\pi}{b} n x_2 \sin\frac{\pi}{c} s x_3 dx_1 dx_2 dx_3,$$

$$\mu_{mns} \equiv \pi \sqrt{\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} + \frac{s^2}{c^2}}.$$

## § 4. Распространение тепла в круглой трубе

Рассмотрим теперь задачу о распространении тепла в круглой трубе, если распределение температуры при $t=0$ в ней задано, а затем, при $t>0$, на ее внутренней и внешней стенках поддерживается температура $T=0$. Начальное распределение температуры будем считать неизменным по длине трубы, а теплоотдачей с ее торцов пренебрегать. При этих предположениях придем к задаче

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} = \frac{1}{k}\frac{\partial T}{\partial t}, \tag{35}$$

$$T|_{r=a} = T|_{r=b} = 0, \tag{36}$$

$$T|_{t=0} = f(r, \varphi), \tag{37}$$

где $a$ и $b$ — внутренний и наружный радиусы трубы, а $f(r, \varphi)$ — заданная функция.

Исключим последовательно дифференциальные операции по $\varphi$ и по $r$

При исключении дифференциальных операций по $\varphi$ мы находимся в точности при условиях задачи предыдущего параграфа. Применив в интервале $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$ интегральное преобразование с ядром (27), приведем задачу (35)—(37) к виду

$$\frac{\partial^2 \overline{T}}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \overline{T}}{\partial r} - \frac{m^2}{r^2}\overline{T} = \frac{1}{k}\frac{\partial \overline{T}}{\partial t}, \tag{38}$$

$$\overline{T}|_{r=a} = \overline{T}|_{r=b} = 0, \tag{39}$$

$$\overline{T}|_{t=0} = \overline{f}_\gamma(r), \qquad \gamma = \begin{cases} 2m, \\ 2m-1, \end{cases} \tag{40}$$