а λ_γ — положительные корни уравнения $J_0(\lambda a)=0$, перенумерованные в порядке их возрастания.

3. Путем повторного применения интегральных преобразований решить задачу о распространении тепла в прямоугольном параллелепипеде $0 \leqslant x_1 \leqslant a$, $0 \leqslant x_2 \leqslant b$, $0 \leqslant x_3 \leqslant c$ при начальном условии

$$T|_{t=0} = f(x_1, x_2, x_3),$$

если при $t > 0$ его грани поддерживаются при постоянной температуре.

Указание. Уравнение теплопроводности записать в прямоугольных декартовых координатах и последовательно исключить дифференциальные операции по x_1, x_2, x_3 аналогично тому, как это было сделано в § 2.

Ответ:

$$T = \frac{8}{abc} \sum_{m, n, s=1}^{\infty} f_{mns} e^{-k\mu_{mns} t} \sin \frac{\pi}{a} m x_1 \sin \frac{\pi}{b} n x_2 \sin \frac{\pi}{c} s x_3,$$

где

$$f_{mns} \equiv \int_0^a \int_0^b \int_0^c f(x_1, x_2, x_3) \sin \frac{\pi}{a} m x_1 \sin \frac{\pi}{b} n x_2 \sin \frac{\pi}{c} s x_3 dx_1 dx_2 dx_3,$$

$$\mu_{mns} \equiv \pi \sqrt{\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} + \frac{s^2}{c^2}}.$$

§ 4. Распространение тепла в круглой трубе

Рассмотрим теперь задачу о распространении тепла в круглой трубе, если распределение температуры при $t=0$ в ней задано, а затем, при $t>0$, на ее внутренней и внешней стенках поддерживается температура $T=0$. Начальное распределение температуры будем считать неизменным по длине трубы, а теплоотдачей с ее торцов пренебрегать. При этих предположениях придем к задаче

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} = \frac{1}{k}\frac{\partial T}{\partial t}, \tag{35}$$

$$T|_{r=a} = T|_{r=b} = 0, \tag{36}$$

$$T|_{t=0} = f(r, \varphi), \tag{37}$$

где a и b — внутренний и наружный радиусы трубы, а $f(r, \varphi)$ — заданная функция.

Исключим последовательно дифференциальные операции по φ и по r

При исключении дифференциальных операций по φ мы находимся в точности при условиях задачи предыдущего параграфа. Применив в интервале $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$ интегральное преобразование с ядром (27), приведем задачу (35)—(37) к виду

$$\frac{\partial^2 \overline{T}}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \overline{T}}{\partial r} - \frac{m^2}{r^2}\overline{T} = \frac{1}{k}\frac{\partial \overline{T}}{\partial t}, \tag{38}$$

$$\overline{T}|_{r=a} = \overline{T}|_{r=b} = 0, \tag{39}$$

$$\overline{T}|_{t=0} = \overline{f}_\gamma(r), \quad \gamma = \begin{cases} 2m, \\ 2m-1, \end{cases} \tag{40}$$

где функции $\overline{T}$ и $\overline{f}_\gamma(r)$ определены формулами, аналогичными соответствующим формулам предыдущего параграфа.

Задача (38)—(40) отличается от задачи предыдущего параграфа (28)—(30) лишь граничным условием. Поэтому, отыскивая преобразование, позволяющее исключить дифференциальные операции по r, заключим, что ядро $\tilde{K}_\eta(r)$ будет удовлетворять уравнению Бесселя:

$$\frac{\partial^2\tilde{K}}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\tilde{K}}{\partial r}+\left(\lambda^2-\frac{m^2}{r^2}\right)\tilde{K}=0, \tag{41}$$

граничные же условия, согласно (39), будут иметь вид:

$$\tilde{K}|_{r=a}=\tilde{K}|_{r=b}=0. \tag{42}$$

Подчинив общее решение $AJ_m(\lambda r)+BY_m(\lambda r)$ уравнения (41) условиям (42), получим:

$$\begin{aligned}&AJ_m(\lambda a)+BY_m(\lambda a)=0,\\&AJ_m(\lambda b)+BY_m(\lambda b)=0.\end{aligned} \tag{43}$$

Чтобы существовали решения, отличные от тривиального решения $A=B=0$, определитель

$$\begin{vmatrix}J_m(\lambda a) & Y_m(\lambda a)\\ J_m(\lambda b) & Y_m(\lambda b)\end{vmatrix}$$

должен быть равен нулю, что для определения собственных чисел $\lambda^2_{m\eta}$ даст уравнение

$$J_m(\lambda a)\,Y_m(\lambda b)-Y_m(\lambda a)\,J_m(\lambda b)=0.$$

Решив систему (43), найдем, что с точностью до произвольного множителя

$$A=Y_m(\lambda_{m\eta}b),\qquad B=-J_m(\lambda_{m\eta}b).$$

Таким образом, можно принять

$$C_{m\eta}\tilde{K}_\eta(r)=Y_m(\lambda_{m\eta}b)\,J_m(\lambda_{m\eta}r)-J_m(\lambda_{m\eta}b)\,Y_m(\lambda_{m\eta}r),$$

где $C_{m\eta}^{-1}$—нормирующий множитель. Используя уравнение (41) и уравнение для собственных чисел, найдем, что

$$C_{m\eta}=\int\limits_a^b[Y_m(\lambda_{m\eta}b)\,J_m(\lambda_{m\eta}r)-J_m(\lambda_{m\eta}b)\,Y_m(\lambda_{m\eta}r)]^2\,r\,dr=$$

$$=\frac{J_m^2(a\lambda_{m\eta})-J_m^2(b\lambda_{m\eta})}{\pi\lambda^2_{m\eta}J_m^2(\lambda_{m\eta}a)}.$$

Осуществив в интервале $a\leqslant r\leqslant b$ преобразование с ядром $\tilde{K}_\eta(r)$ и весовой функцией $\rho=r$, приведем задачу (38)—(40)

к виду

$$\frac{\partial \tilde{T}}{\partial t}+k\lambda_{m\eta}^{2}\tilde{T}=0,$$

$$\tilde{T}\big|_{t=0}=f_{\gamma\eta},\qquad \gamma=\begin{cases}2m,\\ 2m-1,\end{cases}$$

где

$$\tilde{T}=\frac{1}{C_{m\eta}}\int_a^b \bar{T}(r,\ m)\left[Y_m(\lambda_{m\eta}b)\,J_m(\lambda_{m\eta}r)-J_m(\lambda_{m\eta}b)\,Y_m(\lambda_{m\eta}r)\right]rdr,$$

$$f_{\gamma\eta}=\frac{1}{C_{m\eta}}\int_a^b f_\gamma(r)\left[Y_m(\lambda_{m\eta}b)\,J_m(\lambda_{m\eta}r)-J_m(\lambda_{m\eta}b)\,Y_m(\lambda_{m\eta}r)\right]r\,dr.$$

Отсюда

$$\tilde{T}_{\gamma\eta}(t)=f_{\gamma\eta}e^{-k\lambda_{m\eta}^{2}t},\qquad \gamma=\begin{cases}2m,\\ 2m-1.\end{cases}$$

Осуществив обратные преобразования, получим:

$$\bar{T}_\gamma(r,\ t)=\sum_{\eta=1}^{\infty} f_{\gamma\eta}e^{-k\lambda_{m\eta}^{2}t}\left[Y_m(\lambda_{m\eta}b)\,J_m(\lambda_{m\eta}r)-J_m(\lambda_{m\eta}b)\,Y_m(\lambda_{m\eta}r)\right]$$

и

$$T(r,\ \varphi,\ t)=\sum_{m=1}^{\infty}(\bar{T}_{2m}\bar{K}_{2m}+\bar{T}_{2m-1}\bar{K}_{2m-1})=\sum_{m,\ \eta=1}^{\infty}(f_{2m,\ \eta}\cos m\varphi+$$

$$+f_{2m-1,\ \eta}\sin m\varphi)\left[Y_m(\lambda_{m\eta}b)\,J_m(\lambda_{m\eta}r)-J_m(\lambda_{m\mu}b)\,Y_m(\lambda_{m\eta}r)\right]e^{-k\lambda_{m\eta}^{2}t}.$$

Этот двойной ряд и даст решение рассматриваемой задачи (35)—(37).

ЗАДАЧА

Показать, что в случае, когда с внешней поверхности трубы происходит лучеиспускание в среду с нулевой температурой, остальные же условия рассмотренной выше задачи остаются неизменными, собственные числа задачи $\lambda_{m\eta}^2$ определяются уравнением

$$\lambda\left[J_m(\lambda a)Y_m'(\lambda b)-Y_m(\lambda a)\,J_m'(\lambda b)\right]+h\left[J_m(\lambda a)\,Y_m(\lambda b)-Y_m(\lambda a)\,J_m(\lambda b)\right]=0.$$

§ 5. Поток тепла в шаре

Задача о распространении тепла в шаре приводит к преобразованию, в котором ядром служат сферические функции.

Рассмотрим однородный шар радиуса a, поверхность которого поддерживается при заданной температуре $T=0$. Изучение процесса установления тепла в шаре приводит нас в сферических координатах r, θ, φ к следующей задаче. Найти решение урав-