к виду

$$\frac{\partial \tilde{T}}{\partial t} + k\lambda_{m\eta}^2 \tilde{T} = 0,$$

$$\tilde{T}\,|_{t=0} = f_{\gamma\eta}, \qquad \gamma = \begin{cases} 2m, \\ 2m-1, \end{cases}$$

где

$$\tilde{T} = \frac{1}{C_{m\eta}} \int_a^b \overline{T}(r,\ m)\,[Y_m(\lambda_{m\eta} b)\, J_m(\lambda_{m\eta} r) - J_m(\lambda_{m\eta} b)\, Y_m(\lambda_{m\eta} r)]\, r dr,$$

$$f_{\gamma\eta} = \frac{1}{C_{m\eta}} \int_a^b f_\gamma(r)\,[Y_m(\lambda_{m\eta} b)\, J_m(\lambda_{m\eta} r) - J_m(\lambda_{m\eta} b)\, Y_m(\lambda_{m\eta} r)]\, r\, dr.$$

Отсюда

$$\tilde{T}_{\gamma\eta}(t) = f_{\gamma\eta} e^{-k\lambda_{m\eta}^2 t}, \qquad \gamma = \begin{cases} 2m, \\ 2m-1. \end{cases}$$

Осуществив обратные преобразования, получим:

$$\overline{T}_\gamma(r,\ t) = \sum_{\eta=1}^{\infty} f_{\gamma\eta} e^{-k\lambda_{m\eta}^2 t} \left[Y_m(\lambda_{m\eta} b)\, J_m(\lambda_{m\eta} r) - J_m(\lambda_{m\eta} b)\, Y_m(\lambda_{m\eta} r)\right]$$

и

$$T(r,\ \varphi,\ t) = \sum_{m=1}^{\infty} (\overline{T}_{2m} \overline{K}_{2m} + \overline{T}_{2m-1} \overline{K}_{2m-1}) = \sum_{m,\ \eta=1}^{\infty} (f_{2m,\ \eta} \cos m\varphi +$$

$$+ f_{2m-1,\ \eta} \sin m\varphi)\,[Y_m(\lambda_{m\eta} b)\, J_m(\lambda_{m\eta} r) - J_m(\lambda_{m\mu} b)\, Y_m(\lambda_{m\eta} r)]\, e^{-k\lambda_{m\eta}^2 t}.$$

Этот двойной ряд и даст решение рассматриваемой задачи (35)—(37).

ЗАДАЧА

Показать, что в случае, когда с внешней поверхности трубы происходит лучеиспускание в среду с нулевой температурой, остальные же условия рассмотренной выше задачи остаются неизменными, собственные числа задачи $\lambda_{m\eta}^2$ определяются уравнением

$$\lambda\,[J_m(\lambda a) Y'_m(\lambda b) - Y_m(\lambda a)\, J'_m(\lambda b)] + h\,[J_m(\lambda a)\, Y_m(\lambda b) - Y_m(\lambda a)\, J_m(\lambda b)] = 0.$$

§ 5. Поток тепла в шаре

Задача о распространении тепла в шаре приводит к преобразованию, в котором ядром служат сферические функции.

Рассмотрим однородный шар радиуса a, поверхность которого поддерживается при заданной температуре $T=0$. Изучение процесса установления тепла в шаре приводит нас в сферических координатах r, θ, φ к следующей задаче. Найти решение уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial T}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial\mu}\left[(1-\mu^2)\frac{\partial T}{\partial\mu}\right]+\frac{1}{r^2(1-\mu^2)}\frac{\partial^2 T}{\partial\varphi^2}=\frac{1}{k}\frac{\partial T}{\partial t}, \qquad (44)$$

$$\mu=\cos\theta,$$

при начальном условии

$$T|_{t=0}=f(r,\ \theta,\ \varphi) \qquad (45)$$

и граничном условии

$$T|_{r=a}=0. \qquad (46)$$

Исключая дифференцирование по координате φ, найдем, что ядро K преобразования должно удовлетворять уравнению

$$\frac{\partial^2 K}{\partial\varphi^2}+m^2K=0$$

и условию периодичности

$$K|_{\varphi=0}=K|_{\varphi=2\pi}.$$

Как и в § 3—4, положим:

$$\tilde{K}_\gamma(\varphi)=\frac{1}{\pi}\cos m\varphi \quad \text{при} \quad \gamma=2m, \quad \frac{1}{\pi}\sin m\varphi \quad \text{при} \quad \gamma=2m-1,$$

где m — целые положительные числа.

Осуществив прямое преобразование, приведем задачу (44) — (46) к виду:

$$\frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial \bar{T}}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\left\{\frac{\partial}{\partial\mu}\left[(1-\mu^2)\frac{\partial\bar{T}}{\partial\mu}\right]-\frac{m^2}{1-\mu^2}\bar{T}\right\}=\frac{1}{k}\frac{\partial\bar{T}}{\partial t}, \qquad (47)$$

$$\bar{T}|_{t=0}=\bar{f}_\gamma(\theta,\ r), \quad \gamma=\begin{cases}2m,\\ 2m-1,\end{cases} \qquad (48)$$

$$\bar{T}|_{r=0}<\infty,\ \bar{T}|_{r=a}=0, \qquad (49)$$

где $\bar{T}$ и $\bar{f}_\gamma(\theta,\ r)$ — интегральные преобразования в интервале $0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi$ с ядром $\bar{K}_\gamma(\varphi)$ функций T и $f(r,\ \theta,\ \varphi)$.

Имея в виду исключить дифференциальные операции по μ, рассмотрим дифференциальное выражение

$$\mathscr{M}_\mu\bar{T}\equiv\frac{\partial}{\partial\mu}\left[(1-\mu^2)\frac{\partial\bar{T}}{\partial\mu}\right]-\frac{m^2}{1-\mu^2}\bar{T},$$

для которого

$$a_{\mu\mu}=1-\mu^2, \quad p(\mu)=1-\mu^2, \quad q(\mu)=\frac{m^2}{1-\mu^2}, \quad \rho=1.$$

Ядро преобразования $\tilde{K}$, позволяющего исключить дифференциальные операции по μ, должно удовлетворять уравнению Лежандра:

$$\frac{\partial}{\partial\mu}\left[(1-\mu^2)\frac{\partial\tilde{K}}{\partial\mu}\right]+\left(\lambda-\frac{m^2}{1-\mu^2}\right)\tilde{K}=0,$$

для которого точки $\mu=\pm 1$ являются особыми. Как мы знаем из гл. XXI, требование ограниченности решения уравнения Лежандра в особых точках удовлетворяется при

$$\lambda=n(n+1) \qquad (n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots).$$

При этом ограниченными в интервале $-1\leqslant\mu\leqslant 1$ решениями этого уравнения являются присоединенные полиномы Лежандра $P_{nm}(\mu)$. С помощью формулы (20) гл. XXI найдем, что

$$C_{mn}\equiv\int_{-1}^{+1}[P_{nm}(\mu)]^2\,d\mu=\frac{2\delta}{2n+1}\frac{(n+m)!}{(n-m)!}, \qquad \delta=\begin{cases}2 \text{ при } m=0,\\ 1 \text{ при } m\neq 0.\end{cases}$$

Осуществив в интервале $-1\leqslant\mu\leqslant 1$ преобразование с ядром $\frac{1}{C_{mn}}P_{nm}(\mu)$, приведем задачу (47)—(49) к виду:

$$\frac{\partial^2\tilde{T}}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial\tilde{T}}{\partial r}-\frac{n(n+1)}{r^2}\tilde{T}=\frac{1}{k}\frac{\partial\tilde{T}}{\partial t}, \tag{50}$$

$$\tilde{T}\,|_{t=0}=\tilde{f}_{\gamma n}(r), \qquad \gamma=\begin{cases}2m,\\ 2m-1,\end{cases} \tag{51}$$

$$\tilde{T}\,|_{r=0}<\infty,\ \tilde{T}\,|_{r=a}=0, \tag{52}$$

где $\tilde{T}$ и $\tilde{f}_{\gamma n}(r)$—функции, полученные в результате последовательного применения интегральных преобразований по φ и μ к функциям T и $f(r,\ \theta,\ \varphi)$.

Исключим, наконец, дифференциальные операции по r.

С помощью подстановки

$$\tilde{T}=\frac{\tilde{v}}{r^{\frac{1}{2}}},$$

задача (50)—(52) приведется к виду:

$$\frac{\partial^2\tilde{v}}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\tilde{v}}{\partial r}-\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2}{r^2}\tilde{v}=\frac{1}{k}\frac{\partial\tilde{v}}{\partial t}, \tag{53}$$

$$\tilde{v}\,|_{t=0}=r^{\frac{1}{2}}\tilde{f}_{\gamma n}(r), \quad \gamma=\begin{cases}2m,\\ 2m-1,\end{cases} \tag{54}$$

$$\tilde{v}\,|_{r=0}<\infty, \quad \tilde{v}\,|_{r=a}=0. \tag{55}$$

Для выражения, содержащего дифференциальные операции по r, получим:

$$p(r)=r, \quad \rho(r)=r.$$

Введем функцию $\hat{K}_s(r)$, удовлетворяющую уравнению Бесселя с полуцелым индексом:

$$\frac{\partial^2\hat{K}}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\hat{K}}{\partial r}+\left[\lambda^2-\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2}{r^2}\right]\hat{K}=0 \tag{56}$$

и граничным условиям:

$$|\hat{K}|\,|_{r=0} < \infty, \quad \hat{K}|_{r=a} = 0. \tag{57}$$

Ограниченным при $r=0$ решением этого уравнения является функция Бесселя $J_{n+\frac{1}{2}}(\lambda r)$. Используя граничное условие при $r=a$, придем к уравнению

$$J_{n+\frac{1}{2}}(\lambda a) = 0,$$

корни λ_{ns} которого, перенумерованные в порядке их возрастания, определят собственные числа задачи (56)—(57).

Ядро преобразования равно $\frac{1}{C_{ns}} J_{n+\frac{1}{2}}(\lambda_{ns} r)$, где

$$C_{ns} = \frac{a}{2}\left[J'_{n+\frac{1}{2}}(\lambda_{ns} a)\right]^2.$$

Применив в интервале $0 \leqslant r \leqslant a$ интегральное преобразование с найденным ядром, приведем задачу (53)—(55) к виду:

$$\frac{\partial \hat{v}}{\partial t} + k\lambda_{ns}^2 \hat{v} = 0, \tag{58}$$

$$\hat{v}|_{t=0} = f_{\gamma ns}, \quad \gamma = \begin{cases} 2m, \\ 2m-1, \end{cases} \tag{59}$$

где $\hat{v}$ — соответствующее интегральное преобразование функции $\tilde{v}$, а $f_{\gamma ns} = \frac{1}{C_{ns}} \int\limits_0^a \tilde{f}_{\gamma n}(r)\, r^{\frac{3}{2}} J_{n+\frac{1}{2}}(\lambda_{ns} r)\, dr.$

Решив задачу (58)—(59), найдем, что

$$\hat{v} = f_{\gamma ns} e^{-k\lambda_{ns}^2 t}.$$

Осуществляя преобразования, обратные проделанным выше, последовательно получим:

$$\tilde{v} = \sum_{s=1}^{\infty} f_{\gamma ns} e^{-k\lambda_{ns}^2 t} J_{n+\frac{1}{2}}(\lambda_{ns} r),$$

$$\tilde{T} = \frac{1}{r^{\frac{1}{2}}} \sum_{s=1}^{\infty} f_{\gamma ns} e^{-k\lambda_{ns}^2 t} J_{n+\frac{1}{2}}(\lambda_{ns} r),$$

$$\overline{T} = \frac{1}{r^{\frac{1}{2}}} \sum_{n,\ s=1}^{\infty} f_{\gamma ns} e^{-k\lambda_{ns} t} J_{n+\frac{1}{2}}(\lambda_{ns} r)\, P_{nm}(\mu),$$

$$T(r, \theta, \varphi, t) = \frac{1}{r^{\frac{1}{2}}} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n,\ s=1}^{\infty} e^{-k\lambda_s t} J_{n+\frac{1}{2}}(\lambda_{ns} r)\, P_{nm}(\mu)\,(f_{2m,\,ns} \cos m\varphi + f_{2m-1,\,ns} \sin m\varphi).$$

Последний из этих рядов и является решением рассматриваемой задачи (44)—(46).

§ 6. Стационарный поток тепла в параллелепипеде

Предположим, что грань $x_3=0$, $0\leqslant x_1\leqslant a$, $0\leqslant x_2\leqslant b$ прямоугольного параллелепипеда $0\leqslant x_1\leqslant a$, $0\leqslant x_2\leqslant b$, $0\leqslant x_3\leqslant c$ поддерживается при температуре T_0, тогда как с остальных граней происходит излучение в пространство с температурой, равной нулю. Поставим целью найти установившееся распределение температуры T в таком параллелепипеде. При этом придем к задаче для уравнения Лапласа:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial x_3^2}=0 \tag{60}$$

при граничных условиях

$$\left.\begin{aligned}
&\left[\frac{\partial T}{\partial x_1}-hT\right]_{x_1=0}=0, && \left[\frac{\partial T}{\partial x_1}+hT\right]_{x_1=a}=0,\\
&\left[\frac{\partial T}{\partial x_2}-hT\right]_{x_2=0}=0, && \left[\frac{\partial T}{\partial x_2}+hT\right]_{x_2=b}=0,\\
&T\big|_{x_3=0}=T_0, && \left[\frac{\partial T}{\partial z}+hT\right]_{x_3=c}=0.
\end{aligned}\right\} \tag{61}$$

Исключим дифференциальные операции по x_1 и x_2.

Ядро $\overline{K}$ преобразования, исключающего операцию дифференцирования по x_1, должно быть решением граничной задачи

$$\frac{\partial^2 \overline{K}}{\partial x_1^2}+\lambda^2\overline{K}=0, \tag{62}$$

$$\left[\frac{\partial \overline{K}}{\partial x_1}-h\overline{K}\right]_{x_1=0}=0,\quad \left[\frac{\partial \overline{K}}{\partial x_1}+h\overline{K}\right]_{x_1=a}=0. \tag{63}$$

Подчинив общее решение $A\cos\lambda x_1+B\sin\lambda x_1$ уравнения (62) граничным условиям (63), получим систему однородных уравнений:

$$Ah-B\lambda=0,$$
$$A(h\cos\lambda a-\lambda\sin\lambda a)+B(\lambda\cos\lambda a+h\sin\lambda a)=0.$$

Решения этой системы, отличные от тривиального ($A=B=0$), существуют только тогда, когда ее определитель равен нулю. Из этого условия, после элементарных преобразований, придем к следующему уравнению для определения собственных чисел λ_m^2:

$$\operatorname{tg}\lambda_m a=\frac{2h\lambda_m}{\lambda_m^2-h^2}.$$

При $\lambda=\lambda_m$ коэффициенты A и B пропорциональны соответственно λ_m и h. Таким образом, с точностью до постоянного множителя,