Последний из этих рядов и является решением рассматриваемой задачи (44) — (46).

§ 6. Стационарный поток тепла в параллелепипеде

Предположим, что грань $x_3=0$, $0 \leqslant x_1 \leqslant a$, $0 \leqslant x_2 \leqslant b$ прямоугольного параллелепипеда $0 \leqslant x_1 \leqslant a$, $0 \leqslant x_2 \leqslant b$, $0 \leqslant x_3 \leqslant c$ поддерживается при температуре T_0, тогда как с остальных граней происходит излучение в пространство с температурой, равной нулю. Поставим целью найти установившееся распределение температуры T в таком параллелепипеде. При этом придем к задаче для уравнения Лапласа:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial x_3^2}=0 \tag{60}$$

при граничных условиях

$$\left.\begin{aligned}
&\left[\frac{\partial T}{\partial x_1}-hT\right]_{x_1=0}=0, && \left[\frac{\partial T}{\partial x_1}+hT\right]_{x_1=a}=0,\\
&\left[\frac{\partial T}{\partial x_2}-hT\right]_{x_2=0}=0, && \left[\frac{\partial T}{\partial x_2}+hT\right]_{x_2=b}=0,\\
&T\,|_{x_3=0}=T_0, && \left[\frac{\partial T}{\partial z}+hT\right]_{x_3=c}=0.
\end{aligned}\right\} \tag{61}$$

Исключим дифференциальные операции по x_1 и x_2.

Ядро $\overline{K}$ преобразования, исключающего операцию дифференцирования по x_1, должно быть решением граничной задачи

$$\frac{\partial^2 \overline{K}}{\partial x_1^2}+\lambda^2\overline{K}=0, \tag{62}$$

$$\left[\frac{\partial \overline{K}}{\partial x_1}-h\overline{K}\right]_{x_1=0}=0, \quad \left[\frac{\partial \overline{K}}{\partial x_1}+h\overline{K}\right]_{x_1=a}=0. \tag{63}$$

Подчинив общее решение $A\cos\lambda x_1+B\sin\lambda x_1$ уравнения (62) граничным условиям (63), получим систему однородных уравнений:

$$Ah-B\lambda=0,$$
$$A(h\cos\lambda a-\lambda\sin\lambda a)+B(\lambda\cos\lambda a+h\sin\lambda a)=0.$$

Решения этой системы, отличные от тривиального ($A=B=0$), существуют только тогда, когда ее определитель равен нулю. Из этого условия, после элементарных преобразований, придем к следующему уравнению для определения собственных чисел λ_m^2:

$$\operatorname{tg}\lambda_m a=\frac{2h\lambda_m}{\lambda_m^2-h^2}.$$

При $\lambda=\lambda_m$ коэффициенты A и B пропорциональны соответственно λ_m и h. Таким образом, с точностью до постоянного множителя, решения граничной задачи (62)—(63) имеют вид

$$\cos \lambda_m x_1 + \frac{h}{\lambda_m} \sin \lambda_m x_1. \tag{64}$$

Ядро прямого преобразования будет отличаться от (64) лишь нормирующим множителем C_m^{-1}, где

$$C_m = \int_0^a \left[\cos \lambda_m x_1 + \frac{h}{\lambda_m} \sin \lambda_m x_1\right]^2 dx_1 =$$

$$= \frac{a}{2}\left(1 + \frac{h^2}{\lambda_m^2}\right) + \frac{1}{\lambda_m}\left(\cos^2 \lambda_m a + \frac{h}{\lambda_m} \sin^2 \lambda_m a\right).$$

Осуществив в интервале $0 \leqslant x_1 \leqslant a$ преобразование с найденным ядром, приведем задачу (60)—(61) к виду:

$$\frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial x_3^2} - \lambda_m^2 \bar{T} = 0, \tag{65}$$

$$\left[\frac{\partial \bar{T}}{\partial x_2} - hT\right]_{x_2=0} = 0, \quad \left[\frac{\partial \bar{T}}{\partial x_2} + h\bar{T}\right]_{x_2=b} = 0,$$
$$\bar{T}\Big|_{x_3=0} = \frac{aT_0}{C_m}, \quad \left[\frac{\partial \bar{T}}{\partial x_3} + h\bar{T}\right]_{x_3=c} = 0. \tag{66}$$

Совершенно аналогичным путем исключим дифференцирование и по координате x_2, после чего задача (65)—(66) примет вид:

$$\frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial x_3^2} - (\mu_n^2 + \lambda_m^2)\,\tilde{T} = 0, \tag{67}$$

$$\tilde{T}\Big|_{x_3=0} = \frac{1}{C_m D_n}\, abT_0, \quad \left[\frac{\partial \tilde{T}}{\partial x_3} + h\tilde{T}\right]_{x_3=c} = 0, \tag{68}$$

где $\tilde{T}$ — интегральное преобразование функции $\bar{T}$ в интервале $0 \leqslant x_2 \leqslant b$ с ядром

$$\frac{1}{D_n} \cos\left(\mu_n x_2 + \frac{h}{\mu_n} \sin \mu_n x_2\right),$$

где

$$D_n = \frac{b}{2}\left(1 + \frac{h^2}{\mu_n^2}\right) + \frac{1}{\mu_n}\left(\cos^2 \mu_n b + \frac{h}{\mu_n} \sin^2 \mu_n b\right),$$

а μ_n — корни уравнения

$$\operatorname{tg} \mu_n b = \frac{2h\,\mu_n}{\mu_n^2 - h^2},$$

перенумерованные в порядке их возрастания.

Подчинив общее решение уравнения (67):

$$\tilde{T}_{mn}(x_3) = A_{mn}e^{\nu_{mn}x_3} + B_{mn}e^{-\nu_{mn}x_3} \qquad (\nu_{mn} = \sqrt{\lambda_m^2 + \mu_n^2})$$

граничным условиям (68), для определения постоянных A_{mn}, B_{mn} получим систему уравнений:

$$A_{mn} + B_{mn} = \frac{abT_0}{C_m D_n},$$

$$A_{mn}(h+\nu_{mn})e^{\nu_{mn}c} + B_{mn}(h+\nu_{mn})e^{-\nu_{mn}c} = 0,$$

откуда

$$A_{mn} = \frac{(\nu_{mn}-h)e^{-\nu_{mn}c}}{(\nu_{mn}+h)e^{\nu_{mn}c} + (\nu_{mn}-h)e^{-\nu_{mn}c}} \frac{abT_0}{C_m D_n},$$

$$B_{mn} = \frac{(\nu_{mn}+h)e^{\nu_{mn}c}}{(\nu_{mn}+h)e^{\nu_{mn}c} + (\nu_{mn}-h)e^{-\nu_{mn}c}} \frac{abT_0}{C_m D_n},$$

$$T_{mn}(x_3) = a_{mn}e^{-\nu_{mn}(c-x_3)} + b_{mn}e^{\nu_{mn}(c-x_3)},$$

где

$$a_{mn} = \frac{(\nu_{mn}-h)}{(\nu_{mn}+h)e^{\nu_{mn}c} + (\nu_{mn}-h)e^{-\nu_{mn}c}} \frac{abT_0}{C_m D_n},$$

$$b_{mn} = \frac{(\nu_{mn}+h)}{(\nu_{mn}+h)e^{\nu_{mn}c} + (\nu_{mn}-h)e^{-\nu_{mn}c}} \frac{abT_0}{C_m D_n}.$$

Осуществив обратные преобразования, получим решение исходной задачи (60)—(61) в форме двойного ряда

$$T(x_1, x_2, x_3) = \sum_{m,\,n=1}^{\infty} \left(\cos\lambda_m x_1 + \frac{h}{\lambda_m}\sin\lambda_m x_1\right) \times$$
$$\times \left(\cos\mu_n x_2 + \frac{h}{\mu_n}\sin\mu_n x_2\right)\left(a_{mn}e^{-\nu_{mn}(c-x_3)} + b_{mn}e^{\nu_{mn}(c-x_3)}\right).$$

ЗАДАЧА

Показать, что установившееся распределение температуры в прямоугольном параллелепипеде $0 \leqslant x_1 \leqslant a$, $0 \leqslant x_2 \leqslant b$, $0 \leqslant x_3 \leqslant c$, когда его грань $x_3 = 0$ поддерживается при температуре T_0, а остальные грани при температуре $T = 0$, может быть представлено в форме двойного ряда:

$$T(x_1, x_2, x_3) = \frac{16T_0}{\pi^2} \sum_{r,\,s=0}^{\infty} \frac{1}{(2r+1)(2s+1)} \times$$
$$\times \sin\frac{(2r+1)\pi x_1}{a} \sin\frac{(2s+1)\pi x_2}{b} \frac{\operatorname{sh}\mu x_3}{\operatorname{sh}\mu c},$$

где

$$\mu = \pi\sqrt{\frac{(2r+1)^2}{a^2} + \frac{(2s+1)^2}{b^2}}.$$