Глава XXXV

ПРИМЕРЫ ПРИМЕНЕНИЯ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ С БЕСКОНЕЧНЫМИ ПРЕДЕЛАМИ

§ 1. Задача о колебаниях бесконечной струны

Изучение задач, в которых оказывается целесообразным применение интегральных преобразований с бесконечными пределами интегрирования, начнем с задачи для одномерного волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \tag{1}$$

в области $-\infty < x < \infty$ при начальных условиях:

$$u\,|_{t=0}=u_0(x), \qquad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=u_1(x), \tag{2}$$

где $u_0(x)$ и $u_1(x)$ — заданные функции, обращающиеся в нуль вне некоторой конечной области. К такой задаче мы приходим, например, при рассмотрении колебаний бесконечной струны или малых одномерных колебаний газа и т. д. под влиянием ограниченного начального возмущения

Ядро интегрального преобразования, позволяющего исключить дифференциальные операции по x, должно удовлетворять уравнению

$$\frac{\partial^2 K}{\partial x^2}+\gamma^2 K=0 \tag{3}$$

и оставаться ограниченным при всех вещественных x. Последнее требование соблюдается при всех вещественных значениях γ^2, т. е. собственные числа задачи для уравнения (3) имеют *непрерывный* спектр. При этом

$$K=Ce^{\pm i\gamma x},$$

из чего ясно, что следует применить преобразование Фурье.

Осуществив преобразование с ядром $K=\frac{1}{2\pi}e^{-i\gamma x}$, преобразуем задачу (1)—(2) к виду*:

$$\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2}+\gamma^2 c^2\bar{u}=0, \tag{4}$$

$$\bar{u}\,|_{t=0}=\bar{u}_0(\gamma), \qquad \left.\frac{\partial \bar{u}}{\partial t}\right|_{t=0}=\bar{u}_1(\gamma), \tag{5}$$

* Напомним, что этот результат записывается сразу на основании формулы (20) гл. XXXIII и замечаний о значении N_a и N_b в § 4 гл. XXXIII.

где

$$\bar{u}=\bar{u}(t, \gamma)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} u(x, t)e^{-i\gamma x}\,dx, \tag{6}$$

$$\bar{u}_0(\gamma)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} u_0(x)\,e^{-i\gamma x}\,dx, \tag{7}$$

$$\bar{u}_1(\gamma)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} u_1(x)\,e^{-i\gamma x}\,dx. \tag{8}$$

Сходимость интегралов (6)—(8) обеспечена тем, что каждая из функций u_0, u_1 и u обращается в нуль вне некоторой конечной области. Функция u обладает этим свойством, так как за конечный промежуток времени возмущение, распространяясь со скоростью c, проходит лишь конечное расстояние. Решением задачи (4)—(5) является функция

$$\bar{u}=\bar{u}_0\cos\gamma ct+\frac{\bar{u}_1}{c}\sin\gamma ct.$$

Представив функции $\cos\gamma ct$ и $\sin\gamma ct$ в показательной форме, подставим функцию $\bar{u}$ в формулу обратного преобразования Фурье:

$$u(x, t)=\int_{-\infty}^{\infty}\bar{u}e^{i\gamma x}\,dx,$$

что даст:

$$u(x, t)=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\bar{u}_0(\gamma)\,e^{-i\gamma(x-ct)}\,d\gamma+\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\bar{u}_0(\gamma)\,e^{-i\gamma(x+ct)}\,d\gamma+$$

$$+\frac{1}{2i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\bar{u}_1}{\gamma c}\,e^{-i\gamma(x-ct)}\,d\gamma-\frac{1}{2i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\bar{u}_1}{\gamma c}e^{-i\gamma(x+ct)}\,d\gamma. \tag{9}$$

Сравнив первые два интеграла в правой части этого соотношения с выражением (7), нетрудно видеть, что они равны соответственно $\frac{1}{2}u_0(x-ct)$ и $\frac{1}{2}u_0(x+ct)$. Чтобы вычислить вторую пару интегралов, заметим, что

$$\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{1}{2i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\bar{u}_1}{\gamma c}e^{-i\gamma\xi}\,d\gamma\right)=\frac{1}{2c}\int_{-\infty}^{\infty}\bar{u}_1 e^{-i\gamma\xi}\,d\gamma=\frac{1}{2c}u_1(\xi),$$

откуда следует, что

$$\frac{1}{2i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\bar{u}_1}{\gamma c}e^{-i\gamma\xi}\,d\gamma=\frac{1}{2c}\int_{a}^{\xi}u_1(\zeta)\,d\zeta,$$

где a — произвольная постоянная. Полагая здесь ξ равным $(x-ct)$ и $(x+ct)$, без труда найдем, что сумма двух последних интегралов в правой части соотношения (9) равна интегралу

$$\frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} u_1(\zeta)\,d\zeta.$$

Подставив вычисленные величины в правую часть соотношения (9), придем к решению первоначальной задачи (1)—(2) в форме Даламбера:

$$u(x, t)=\frac{u_0(x-ct)+u_0(x+ct)}{2}+\frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} u_1(\zeta)\,d\zeta.$$

С этим выражением мы уже имели дело в гл. IV, § 1.

ЗАДАЧА

Применив интегральное преобразование, вывести формулы, определяющие колебания полубесконечной струны, закрепленной в начале координат.

Указание. Исходя из условий закрепления струны, показать, что для исключения дифференциальных операций по x следует применить синус-преобразование Фурье.

§ 2. Линейный поток тепла в полуограниченном стержне

Рассмотрим задачу о распределении температуры в однородном полуограниченном стержне с изолированной боковой поверхностью, если его конец поддерживается при температуре T_0, а начальная температура равна нулю. Выбрав ось x так, чтобы стержень был расположен при $x \geqslant 0$, придем к задаче об интегрировании уравнения теплопроводности:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}=\frac{1}{k}\frac{\partial T}{\partial t} \tag{10}$$

при начальном условии

$$T\,|_{t=0}=0, \tag{11}$$

и граничном условии

$$T\,|_{x=0}=T_0. \tag{12}$$

Ядро $K(x, \lambda)$ интегрального преобразования, позволяющего исключить дифференциальные операции по x, должно удовлетворять следующим требованиям:

$$\frac{\partial^2 K}{\partial x^2}+\lambda^2 K=0,$$

$$K\,|_{x=0}=0, \quad K\,|_{x=\infty}<\infty,$$