где a — произвольная постоянная. Полагая здесь ξ равным $(x-ct)$ и $(x+ct)$, без труда найдем, что сумма двух последних интегралов в правой части соотношения (9) равна интегралу

$$\frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} u_1(\zeta)\,d\zeta.$$

Подставив вычисленные величины в правую часть соотношения (9), придем к решению первоначальной задачи (1)—(2) в форме Даламбера:

$$u(x,\ t)=\frac{u_0(x-ct)+u_0(x+ct)}{2}+\frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} u_1(\zeta)\,d\zeta.$$

С этим выражением мы уже имели дело в гл. IV, § 1.

ЗАДАЧА

Применив интегральное преобразование, вывести формулы, определяющие колебания полубесконечной струны, закрепленной в начале координат.

Указание. Исходя из условий закрепления струны, показать, что для исключения дифференциальных операций по x следует применить синус-преобразование Фурье.

§ 2. Линейный поток тепла в полуограниченном стержне

Рассмотрим задачу о распределении температуры в однородном полуограниченном стержне с изолированной боковой поверхностью, если его конец поддерживается при температуре T_0, а начальная температура равна нулю. Выбрав ось x так, чтобы стержень был расположен при $x \geqslant 0$, придем к задаче об интегрировании уравнения теплопроводности:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}=\frac{1}{k}\frac{\partial T}{\partial t} \tag{10}$$

при начальном условии

$$T\,|_{t=0}=0, \tag{11}$$

и граничном условии

$$T\,|_{x=0}=T_0. \tag{12}$$

Ядро $K(x,\ \lambda)$ интегрального преобразования, позволяющего исключить дифференциальные операции по x, должно удовлетворять следующим требованиям:

$$\frac{\partial^2 K}{\partial x^2}+\lambda^2 K=0,$$
$$K\,|_{x=0}=0,\quad K\,|_{x=\infty}<\infty,$$

откуда вытекает, что с точностью до множителя ядро K равно $\sin \lambda x$, где $0 \leqslant \lambda < \infty$. Таким образом, следует применить синус-преобразование Фурье. Положив

$$K(x, \lambda) = \frac{2}{\pi} \sin \lambda x,$$

преобразуем задачу (10)—(12) к виду

$$\frac{\partial \overline{T}}{\partial t} + k\lambda^2 \overline{T} = \frac{2}{\pi} k\lambda T_0,$$
$$\overline{T}\,|_{t=0} = 0,$$

где

$$\overline{T} = \overline{T}(\lambda, t) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty T(x, t) \sin \lambda x\, dx.$$

Отсюда

$$\overline{T}(\lambda, t) = \frac{2}{\pi} \frac{T_0}{\lambda} (1 - e^{-k\lambda^2 t}).$$

Осуществляя обратное преобразование, получим

$$T(x, t) = \int_0^\infty \overline{T}(\lambda, t) \sin \lambda x\, d\lambda = \frac{2}{\pi} T_0 \int_0^\infty \frac{1 - e^{-k\lambda^2 t}}{\lambda} \sin \lambda x\, d\lambda.$$

Приняв во внимание, что

$$\int_0^\infty e^{-\zeta^2} \frac{\sin \zeta a}{\zeta} d\zeta = \sqrt{\pi} \int_0^{\frac{a}{2}} e^{-\zeta^2} d\zeta,$$

$$\sqrt{\pi} \int_0^\infty e^{-\zeta^2} d\zeta = \int_0^\infty \frac{\sin \zeta a}{\zeta} d\zeta \quad (a > 0),$$

преобразуем последнее соотношение к виду

$$T(x, t) = \frac{2T_0}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{x}{2\sqrt{kt}}}^\infty e^{-\zeta^2} d\zeta.$$

Это выражение и даст решение поставленной задачи. Заметив, что

$$\frac{2}{\pi} \int_0^\xi e^{-\zeta^2} d\zeta \equiv \Phi(\xi)$$

представляет так называемый интеграл вероятности, значения которого табулированы, найденное решение можно также представить в форме

$$T(x, t) = T_0 \left[1 - \Phi\left(\frac{x}{2\sqrt{kt}}\right)\right].$$

ЗАДАЧИ

1. Показать, что распределение температуры в бесконечном однородном стержне с теплоизолированной боковой поверхностью выражается формулой

$$T(x,\ t)=\frac{1}{2\sqrt{\pi kt}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} u_0(\zeta)\, e^{-\frac{(x-\zeta)^2}{4kt}}\, d\zeta,$$

где

$$u_0(x)=T(x,\ 0).$$

Указание. Принять во внимание, что

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-k\zeta^2 t-i\zeta x}\, d\zeta=\frac{1}{2\sqrt{\pi kt}}\, e^{-\frac{x^2}{4kt}},$$

и воспользоваться теоремой о свертке:

$$\bar{f}(\gamma)\,\bar{g}(\gamma)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} dx e^{-i\gamma x}\int\limits_{-\infty}^{x} f(\xi)\, g(x-\xi)\, d\xi,$$

где $\bar{f}(\gamma)$, $\bar{g}(\gamma)$ — преобразования Фурье функций $f(x)$ и $g(x)$.

2. Показать, что распределение температуры в полубесконечном однородном стержне с теплоизолированной боковой поверхностью, конец $x=0$ которого поддерживается при нулевой температуре, выражается формулой

$$T(x,\ t)=\frac{1}{2\sqrt{\pi kt}}\int\limits_{0}^{\infty} u_0(\zeta)\left[e^{-\frac{(x-\zeta)^2}{4kt}}-e^{-\frac{(x+\zeta)^2}{4kt}}\right] d\zeta,$$

где

$$u_0(x)=T(x,\ 0).$$

§ 3. Распределение тепла в цилиндрическом стержне, поверхность которого поддерживается при двух различных температурах

Рассмотрим бесконечный однородный цилиндрический стержень кругового сечения, температура которого в начальный момент времени равна нулю. В последующие моменты времени поверхность стержня на участке длиной $2l$ поддерживается при температуре T_0, а остальная часть поверхности — при нулевой температуре. Требуется определить распределение температуры в стержне.

В цилиндрических координатах с осью z, направленной по оси стержня, и началом, выбранным так, чтобы плоскость $z=0$ делила участок, поддерживаемый при температуре T_0, пополам, распределение температуры T удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial r}+\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}=\frac{1}{k}\frac{\partial T}{\partial t}, \tag{13}$$