## ЗАДАЧИ

1. Показать, что распределение температуры в бесконечном однородном стержне с теплоизолированной боковой поверхностью выражается формулой

$$T(x,\ t)=\frac{1}{2\sqrt{\pi kt}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}u_0(\zeta)\,e^{-\frac{(x-\zeta)^2}{4kt}}\,d\zeta,$$

где

$$u_0(x)=T(x,\ 0).$$

Указание. Принять во внимание, что

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-k\zeta^2t-i\zeta x}\,d\zeta=\frac{1}{2\sqrt{\pi kt}}\,e^{-\frac{x^2}{4kt}},$$

и воспользоваться теоремой о свертке:

$$\bar{f}(\gamma)\,\bar{g}(\gamma)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}dx\,e^{-i\gamma x}\int\limits_{-\infty}^{x}f(\xi)\,g(x-\xi)\,d\xi,$$

где $\bar{f}(\gamma)$, $\bar{g}(\gamma)$—преобразования Фурье функций $f(x)$ и $g(x)$.

2. Показать, что распределение температуры в полубесконечном однородном стержне с теплоизолированной боковой поверхностью, конец $x=0$ которого поддерживается при нулевой температуре, выражается формулой

$$T(x,\ t)=\frac{1}{2\sqrt{\pi kt}}\int\limits_{0}^{\infty}u_0(\zeta)\left[e^{-\frac{(x-\zeta)^2}{4kt}}-e^{-\frac{(x+\zeta)^2}{4kt}}\right]d\zeta,$$

где

$$u_0(x)=T(x,\ 0).$$

## § 3. Распределение тепла в цилиндрическом стержне, поверхность которого поддерживается при двух различных температурах

Рассмотрим бесконечный однородный цилиндрический стержень кругового сечения, температура которого в начальный момент времени равна нулю. В последующие моменты времени поверхность стержня на участке длиной $2l$ поддерживается при температуре $T_0$, а остальная часть поверхности—при нулевой температуре. Требуется определить распределение температуры в стержне.

В цилиндрических координатах с осью $z$, направленной по оси стержня, и началом, выбранным так, чтобы плоскость $z=0$ делила участок, поддерживаемый при температуре $T_0$, пополам, распределение температуры $T$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial r}+\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}=\frac{1}{k}\frac{\partial T}{\partial t},\tag{13}$$

начальному условию

$$T|_{t=0}=0 \tag{14}$$

и граничному условию

$$T|_{r=a}=\begin{cases} T_0 & \text{при} \quad |z|<l, \\ 0 & \text{при} \quad |z|>l. \end{cases} \tag{15}$$

Распределение температуры, очевидно, симметрично относительно плоскости $z=0$, поэтому достаточно рассмотреть часть стержня, расположенную в интервале $0 \leqslant z \leqslant \infty$. При этом, в силу симметрии,

$$\left.\frac{\partial T}{\partial z}\right|_{z=0}=0. \tag{16}$$

Последовательно применяя интегральные преобразования по переменным $z$ и $t$, приведем задачу (13)—(15) к обыкновенному дифференциальному уравнению.

Ядро интегрального преобразования $K(z, \lambda)$, позволяющего исключить операции дифференцирования по $z$, должно удовлетворять уравнению

$$\frac{\partial^2 K}{\partial z^2}+\lambda^2 K=0$$

и граничным условиям:

$$\left.\frac{\partial K}{\partial z}\right|_{z=0}=0, \quad K|_{z=\infty}<0.$$

Условие при $z=0$ вытекает из соотношения (16).

Отсюда ясно, что с точностью до множителя ядро $K$ равно $\cos \lambda z$, т. е. следует применить косинус-преобразование Фурье.

Осуществив это преобразование, приведем задачу (13)—(15) к виду

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2 \overline{T}}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial \overline{T}}{\partial r}-\lambda^2 \overline{T}=\frac{1}{k}\frac{\partial \overline{T}}{\partial t}, \\ &\overline{T}|_{t=0}=0, \\ &\overline{T}|_{r=a}=\frac{2}{\pi}T_0\frac{\sin \lambda l}{\lambda}, \end{aligned}$$

где

$$\overline{T}=\overline{T}(r, \lambda, t)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty T(r, z, t)\cos \lambda z\, dz.$$

Для исключения операции дифференцирования по $t$ воспользуемся преобразованием Лапласа, после чего получим обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2 \tilde{T}}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{d\tilde{T}}{dt}-\left(\lambda^2+\frac{\gamma}{k}\right)\tilde{T}=0, \tag{17}$$

где

$$\tilde{T} = \tilde{T}(r, \lambda, \gamma) = \int_0^\infty \overline{T}(r, \lambda, t) e^{-\gamma t} dt,$$

и граничное условие

$$\tilde{T}\Big|_{r=a} = \frac{2}{\pi} T_0 \frac{\sin \lambda l}{\lambda \gamma}. \tag{18}$$

Решением уравнения (17), ограниченным при $r=0$, согласно § 7 гл. XIII, является функция $I_0(\mu r)$ при

$$\mu = \left(\lambda^2 + \frac{\gamma}{k}\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{19}$$

Принимая во внимание граничное условие (18), получим

$$\tilde{T} = \frac{2}{\pi} T_0 \frac{\sin \lambda l}{\lambda \gamma} \frac{I_0(\mu r)}{I_0(\mu a)}.$$

Эта функция не имеет никаких особенностей на всей комплексной плоскости кроме полюсов.

Отсюда по формуле обращения для преобразования Лапласа найдем, что

$$\overline{T} = \frac{1}{2\pi i} \frac{2T_0 \sin \lambda l}{\pi \lambda} \int_{b-i\infty}^{b+i\infty} e^{\gamma t} \frac{I_0(\mu r)}{I_0(\mu a)} \frac{d\gamma}{\gamma}, \tag{20}$$

если только постоянная $b$ может быть выбрана так, чтобы все полюсы подынтегрального выражения располагались слева от прямой $\operatorname{Re}\gamma = b$. Подынтегральное выражение имеет полюсы при $\gamma=0$, а также при значениях $\gamma = \gamma_m$ $(m = 1, 2, 3, \ldots)$, удовлетворяющих уравнению

$$I_0(\mu a) = 0. \tag{21}$$

Отсюда, учитывая соотношение (19), найдем, что

$$\gamma_m = k(\mu_m^2 - \lambda^2),$$

где $\mu_m$ — корни уравнения (21). Заметив, что в силу соотношения $I_0(ix) = iJ_0(x)$, корни уравнения (21) чисто мнимые и равны по абсолютной величине корням функции Бесселя $J_0(\nu a)$, получим

$$\gamma_m = -k(\nu_m^2 + \lambda^2) \qquad (m = 1, 2, 3, \ldots),$$

где $\nu_m$ — корни уравнения $J_0(\nu a) = 0$, перенумерованные в порядке возрастания.

Таким образом, все полюсы подынтегрального выражения расположены в левой полуплоскости и на мнимой оси. Поэтому число $b$ можно выбрать так, чтобы все они были расположены слева от прямой $\operatorname{Re}\gamma = b$.

Теперь может быть применена теорема Коши о вычетах *, из которой следует, что интеграл в правой части (20) равен произведению $2\pi i$ на сумму вычетов подынтегральной функции в полюсах, расположенных слева от прямой $\operatorname{Re}\gamma = b$. В точке $\gamma = 0$ вычет подынтегрального выражения равен

$$\frac{I_0(\mu r)}{I_0(\mu a)}.$$

Вычеты же в точках $\gamma = \gamma_m$ равны

$$\frac{e^{-k\left(\nu_m^2+\lambda^2\right)t}\,J_0(\nu_m r)}{\gamma_m\left[\dfrac{d}{d\gamma} I_0(\mu a)\right]_{\gamma=\gamma_m}}.$$

Так как

$$\frac{d}{d\gamma} I_0(\mu a) = \left[\frac{d}{d\mu} I_0(\mu a)\right]\frac{d\mu}{d\gamma} = \frac{a}{2k\mu} I_1(\mu a),$$
$$I_1(\mu_m a) = iJ_1(\nu_m a),$$

то знаменатель последнего выражения может быть преобразован к виду

$$\frac{a}{2\nu_m}(\nu_m^2+\lambda^2)\,J_1(\nu_m a).$$

Составляя теперь сумму вычетов и подставляя ее в соотношение (20) вместо фигурирующего там интеграла, получим:

$$\overline{T} = \frac{2T_0}{\pi}\frac{\sin\lambda l}{\lambda}\left[\frac{I_0(\lambda r)}{I_0(\lambda a)} - \frac{2}{a}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\nu_m}{\nu_m^2+\lambda^2}\frac{J_0(\nu_m r)}{J_1(\nu_m a)}e^{-k\left(\nu_m^2+\lambda^2\right)t}\right].$$

Осуществив обратное косинус-преобразование Фурье, найдем решение поставленной задачи:

$$T = T_0\left[-\frac{4}{\pi a}\sum_{m=1}^{\infty} e^{-k\nu_m^2 t}\frac{\nu_m J_0(\nu_m r)}{J_1(\nu_m a)}\int_0^{\infty} e^{-k\lambda^2 t}\frac{\sin\lambda l\cos\lambda z}{\lambda(\nu_m^2+\lambda^2)}\,d\lambda + \right.$$
$$\left. + \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{I_0(\lambda r)}{I_0(\lambda a)}\frac{\sin\lambda l\cos\lambda z}{\lambda}\,d\lambda\right].$$

## ЗАДАЧА

Применив преобразование Лапласа, найти распределение температуры $T$ в бесконечном однородном круглом стержне, если начальная температура стержня равна нулю, а затем его поверхность поддерживается при температуре $T_0$

* См., например, А. И. Лурье [45].

*Ответ*:

$$T = T\left[1 - \frac{2}{a}\sum_{m=1}^{\infty} e^{-k\mu_n^2 t}\,\frac{J_0(\mu_m r)}{\mu_m J_1(\mu_m a)}\right],$$

где $\mu_m$ — корни уравнения $J_0(\mu a) = 0$.

## § 4. Установившееся тепловое состояние бесконечного клина

Рассмотрим бесконечный клин с углом раствора $2\zeta < \pi$. Предположим, что боковые поверхности клина поддерживаются при температуре, равной нулю, за исключением двух полос шириной $a$, примыкающих к ребру клина, которые поддерживаются при температуре $T_0$. Найдем установившееся распределение температуры в клине.

Введя на плоскости, перпендикулярной ребру клина, полярные координаты $r$, $\varphi$ с началом на ребре клина, придем к задаче Дирихле:

$$\Delta T \equiv \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} = 0, \tag{22}$$

$$T\,|_{\varphi = \pm\zeta} = \begin{cases} T_0 & \text{при } r < a, \\ 0 & \text{при } r > a. \end{cases} \tag{23}$$

Попытаемся исключить дифференциальные операции по $r$. Для этого, представив уравнение Лапласа (22) в форме

$$r^2\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + r\frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} = 0,$$

рассмотрим дифференциальное выражение

$$\mathcal{M}_r T \equiv r^2\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + r\frac{\partial T}{\partial r}.$$

В этом выражении $a_{rr} = r^2$, $b_r = r$, $c = 0$, откуда

$$\rho(r) = \frac{1}{r}, \quad p(r) = r, \quad q(r) = 0.$$

Следовательно, ядро интегрального преобразования, с помощью которого можно исключить дифференциальные операции по координате $r$, должно быть решением уравнения

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial K}{\partial r}\right) + \frac{\gamma^2}{r}K = 0.$$

Это уравнение принадлежит к типу уравнений Эйлера. Легко видеть, что ему удовлетворяют функции $K(r, \gamma) = r^{\pm i\gamma}$, что приводит для произведения $\rho K$ к выражению $r^{\pm i\gamma - 1}$. Положив $\gamma = i\mu$, где $\mu$ — вещественное число, мы придем к ядру $r^{\mu - 1}$ преобразования Меллина.