Ответ:

$$T = T\left[1 - \frac{2}{a}\sum_{m=1}^{\infty} e^{-k\mu_n^2 t}\,\frac{J_0(\mu_m r)}{\mu_m J_1(\mu_m a)}\right],$$

где μ_m — корни уравнения $J_0(\mu a) = 0$.

§ 4. Установившееся тепловое состояние бесконечного клина

Рассмотрим бесконечный клин с углом раствора $2\zeta < \pi$. Предположим, что боковые поверхности клина поддерживаются при температуре, равной нулю, за исключением двух полос шириной a, примыкающих к ребру клина, которые поддерживаются при температуре T_0. Найдем установившееся распределение температуры в клине.

Введя на плоскости, перпендикулярной ребру клина, полярные координаты r, φ с началом на ребре клина, придем к задаче Дирихле:

$$\Delta T \equiv \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} = 0, \tag{22}$$

$$T\,|_{\varphi=\pm\zeta} = \begin{cases} T_0 & \text{при } r < a, \\ 0 & \text{при } r > a. \end{cases} \tag{23}$$

Попытаемся исключить дифференциальные операции по r. Для этого, представив уравнение Лапласа (22) в форме

$$r^2\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + r\frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} = 0,$$

рассмотрим дифференциальное выражение

$$\mathscr{M}_r T \equiv r^2\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + r\frac{\partial T}{\partial r}\,.$$

В этом выражении $a_{rr} = r^2$, $b_r = r$, $c = 0$, откуда

$$\rho(r) = \frac{1}{r}\,,\quad p(r) = r,\quad q(r) = 0.$$

Следовательно, ядро интегрального преобразования, с помощью которого можно исключить дифференциальные операции по координате r, должно быть решением уравнения

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial K}{\partial r}\right) + \frac{\gamma^2}{r}K = 0.$$

Это уравнение принадлежит к типу уравнений Эйлера. Легко видеть, что ему удовлетворяют функции $K(r, \gamma) = r^{\pm i\gamma}$, что приводит для произведения ρK к выражению $r^{\pm i\gamma - 1}$. Положив $\gamma = i\mu$, где μ — вещественное число, мы придем к ядру $r^{\mu-1}$ преобразования Меллина.

Применив в интервале $0 \leqslant r \leqslant \infty$ преобразование Меллина, приведем задачу (22)—(23) к виду:

$$\frac{\partial^2 \overline{T}}{\partial \varphi^2} + \mu^2 \overline{T} = 0, \tag{24}$$

$$\overline{T}\,|_{\varphi = \pm\zeta} = \overline{T}_0, \tag{25}$$

где

$$\overline{T} = \int_0^\infty T(r)\, r^{\mu-1}\, dr, \quad \overline{T}_0 = \int_0^a T_0 r^{\mu-1}\, dr = T_0 \frac{a^\mu}{\mu}.$$

Правая часть уравнения (24) равна нулю, так как в рассматриваемом случае $p(0) = 0$.

Возникает, конечно, вопрос, в какой мере соблюдаются условия, обеспечивающие возможность применения преобразования Меллина. Однако помимо общих соображений, которые можно высказать о характере убывания функции $T(r, \varphi)$ на бесконечности, как гармонической функции, мы сможем это проверить по выражению для обратного преобразования (п. 4°, § 5, гл. XXXIII).

Подчинив общее решение $A_\mu \cos \mu\varphi + B_\mu \sin \mu\varphi$ уравнения (24) граничным условиям (25), получим:

$$A_\mu = T_0 \frac{a^\mu \cos \mu\varphi}{\mu \cos \mu\zeta}, \quad B_\mu = 0,$$

откуда

$$\overline{T}(\mu, \varphi) = T_0 \frac{a^\mu \cos \mu\varphi}{\mu \cos \mu\zeta}.$$

Применим теперь формулу обратного преобразования, что даст

$$T(r, \varphi) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\eta - i\infty}^{\eta + i\infty} T_0 \left(\frac{a}{r}\right)^\mu \frac{\cos \mu\varphi}{\cos \mu\zeta} \frac{d\mu}{\mu}. \tag{26}$$

Подынтегральное выражение имеет полюс при $\mu = 0$ и следующий полюс при $\mu = \frac{\pi}{2\zeta}$. При $0 < \eta < \frac{\pi}{2\zeta}$ подынтегральная функция аналитична, равномерно стремится к нулю, когда $\operatorname{Im} \mu \to \pm\infty$, а интеграл $\int_{\eta - i\infty}^{\eta + i\infty} |\overline{T}(\mu, \varphi)|\, d\mu$ сходится при всех $|\varphi| < \zeta$. Последнее вытекает из оценки модуля $|\overline{T}|$ при $\operatorname{Im} \mu \to \pm\infty$. Действительно, положим $\mu = \eta + i\eta'$, так что $\operatorname{Im} \mu = \eta'$. Тогда

$$|\overline{T}(\mu, \varphi)| = |T_0| \left| \frac{a^{\eta + i\eta'}}{\eta + i\eta'} \frac{e^{i\eta\varphi - \eta'\varphi} + e^{-i\eta\varphi + \eta'\varphi}}{e^{i\eta\zeta - \eta'\zeta} + e^{i\eta\zeta + \eta'\zeta}} \right|.$$

Если $\eta' \to \infty$, выражение $|\overline{T}(\eta + i\eta', \varphi)|$ имеет порядок $e^{\eta'(\varphi - \zeta)}$ и экспоненциально убывает, так как $\varphi - \zeta < 0$ в силу неравенства

$|\varphi| < \zeta$. К аналогичному результату придем и при $\eta' \to -\infty$. Это и доказывает сходимость рассматриваемого интеграла. Таким образом, преобразование Меллина имеет смысл во всей представляющей для нас интерес области $-\zeta < \varphi < \zeta$.

В интеграле (26) путь интегрирования может быть смещен на мнимую ось, если полюс $\mu = 0$ обойти по малой полуокружности (в правой полуплоскости). Интеграл по полуокружности будет равен вычету подынтегральной функции при $\mu = 0$, умноженному на πi, т. е. $\frac{1}{2} T_0$. Интеграл же по мнимой оси с исключенной окрестностью точки $\mu = 0$ будет равен главному значению интеграла

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} T_0 \left(\frac{a}{r}\right)^{\mu} \frac{\cos \mu\varphi}{\cos \mu\zeta} \frac{d\mu}{\mu} = \frac{T_0}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{a}{r}\right)^{i\xi} \frac{\operatorname{ch} \xi\varphi}{\operatorname{ch} \xi\zeta} \frac{d\xi}{\xi}.$$

Подынтегральное выражение в последнем интеграле можно упростить Именно, в выражении

$$\left(\frac{a}{r}\right)^{i\xi} = e^{i\xi \ln \frac{a}{r}} = \cos\left(\xi \ln \frac{a}{r}\right) + i \sin\left(\xi \ln \frac{a}{r}\right)$$

достаточно сохранить только нечетную часть, так как функция $\cos\left(\xi \ln \frac{a}{r}\right) \frac{\operatorname{ch} \xi\varphi}{\operatorname{ch} \xi\zeta} \frac{1}{\xi}$ нечетна и главное значение рассматриваемого интеграла от этой части равно нулю. После этого подынтегральное выражение окажется четным и интегрируемым в обычном смысле в окрестности точки $\xi = 0$, вследствие чего интегрирование можно будет вести только вдоль положительной части вещественной оси.

Учитывая сделанные замечания, формулу (26) можно переписать в виде

$$T(r, \varphi) = \frac{T_0}{2} + \frac{T_0}{\pi} \int_0^{\infty} \sin\left(\xi \ln \frac{a}{r}\right) \frac{\operatorname{ch} \xi\varphi}{\operatorname{ch} \xi\zeta} \frac{d\xi}{\xi}.$$

Эта формула и решает поставленную задачу.

ЗАДАЧА

Показать, что при $-\zeta < \varphi < \zeta$ функция $T(r, \varphi)$ обладает следующими свойствами:

$$T(a, \varphi) = \frac{T_0}{2}, \qquad T(r, \varphi) \begin{cases} > \frac{T_0}{2} & \text{при} \quad 0 < r < a, \\ < \frac{T_0}{2} & \text{при} \quad r > a, \end{cases}$$

$$\lim_{r \to \infty} T(r, \varphi) = 0.$$