Глава XXXVI

ИЗЛУЧЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ КОЛЕБАНИЙ

§ 1. Введение

В этой главе рассмотрен ряд фундаментальных задач стационарной теории излучения электромагнитных колебаний. Постановка задач, в основном, следует монографии Г. А. Гринберга [21], однако решение их выполнено с помощью интегральных преобразований, что преследует важную цель еще раз проиллюстрировать применение этих последних.

Задачи рассматриваются в предположении, что имеется лишь одна плоская граница раздела между двумя однородными средами («землей» и «атмосферой»). Без существенного усложнения может быть принято предположение, что имеется ряд параллельных поверхностей раздела, на которых свойства сред испытывают разрывы (слоистые среды). При этом увеличится только число задаваемых граничных условий. Наконец, можно считать, что свойства сред зависят от одной из координат. Все эти обобщения содержатся в упомянутой монографии и могут быть осуществлены и при использовании интегральных преобразований.

Следуя Г. А. Гринбергу, будем предполагать, что распространение излучения происходит в средах, обладающих хотя бы ничтожной электропроводностью, чем достигается достаточно быстрое убывание поля на бесконечности, обеспечивающее сходимость используемых при выкладках интегралов.

При рассмотрении излучения электромагнитных колебаний удобной оказывается запись уравнений поля с помощью векторного потенциала **A** (гл. XXIX, § 6). Это видно, например, из следующего. Как было показано в § 6 гл. XXIX, векторный потенциал удовлетворяет системе уравнений Гельмгольца

$$\Delta A_\alpha + k^2 A_\alpha = -4\pi \frac{\mu}{c} j_\alpha^{(e)}, \tag{1}$$

$$k^2 \equiv \frac{\omega^2\mu\varepsilon + 4\pi i\omega\mu\sigma}{c^2}, \tag{2}$$

где $j_\alpha^{(e)}$ $(\alpha = 1, 2, 3, \ldots)$ — компоненты вектора плотности сторонних токов. Если сторонние токи параллельны некоторой оси (как это, например, имеет место в ряде типов антенн), то, выбрав эту ось в качестве одной из осей декартовой системы координат, видим, что система (1) удовлетворяется, если компоненты вектора **A** по двум другим осям положить равными нулю. Поскольку векторы поля могут быть выражены через векторный потенциал по формулам (50) гл. XXIX, то можно ожидать, что изучение поля в рассматриваемом случае приведется к решению задачи для одного скалярного неоднородного уравнения Гельмгольца относительно одной из не равных тождественно нулю компонент векторного потенциала*.

Так как кроме системы (1) векторный потенциал должен еще удовлетворять граничным условиям, то только что высказанное соображение о возможности положить две компоненты векторного потенциала равными нулю само по себе не имеет доказательной силы. Однако в важнейших случаях оно полностью или частично оправдывается, позволяя упростить задачу. Оставляя до § 5 выяснение условий, при которых рассматриваемое упрощение возможно, заметим, что если, введя это упрощение без дальнейшего обоснования, мы найдем решение задачи, удовлетворяющее граничным условиям, то оно и будет искомым решением в силу теоремы единственности решения системы уравнений Максвелла.

ЗАДАЧИ

1. Показать, что в том случае, когда диэлектрическая постоянная и проводимость зависят от координат, векторный потенциал удовлетворяет уравнениям (в декартовых координатах)

$$\Delta A_\alpha + k^2 A_\alpha - \left(\frac{\partial A_1}{\partial x_1} + \frac{\partial A_2}{\partial x_2} + \frac{\partial A_3}{\partial x_3}\right)\frac{\partial \ln k^2}{\partial x_\alpha} = -4\pi\frac{\mu}{c} j^e_\alpha \quad (\alpha = 1,\ 2,\ 3), \qquad (*)$$

$$k^2 = \frac{\omega^2\mu\varepsilon + 4\pi i\omega\mu\sigma}{c^2}.$$

Указание. Скалярный потенциал взять в обычной форме

$$\varphi = -\frac{i\omega}{ck^2}\left(\frac{\partial A_1}{\partial x_1} + \frac{\partial A_2}{\partial x_2} + \frac{\partial A_3}{\partial x_3}\right)$$

и воспользоваться уравнениями Максвелла.

Заметим, что уравнение (*) кладется в основу при изучении распространения радиоволн в слоистых средах.

2. Показать, что в цилиндрических координатах (r, φ, z) компоненты векторов поля связаны с компонентами векторного потенциала формулами:

$$H_r = \frac{1}{\mu r}\left(\frac{\partial A_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial r A_\varphi}{\partial z}\right), \quad H_\varphi = \frac{1}{\mu}\left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r}\right), \quad H_z = \frac{1}{\mu r}\left(\frac{\partial r A_\varphi}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \varphi}\right),$$

$$E_r = \frac{i\omega}{c}A_r + \frac{i\omega}{ck^2}\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{1}{r}\left(\frac{\partial r A_r}{\partial r} + \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial r A_z}{\partial z}\right)\right],$$

$$E_\varphi = \frac{i\omega}{c}A_\varphi + \frac{i\omega}{ck^2}\frac{\partial}{r\partial \varphi}\left[\frac{1}{r}\left(\frac{\partial r A_r}{\partial r} + \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial r A_z}{\partial z}\right)\right],$$

$$E_z = \frac{i\omega}{c}A_z + \frac{i\omega}{ck^2}\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{1}{r}\left(\frac{\partial r A_r}{\partial r} + \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial r A_z}{\partial z}\right)\right].$$

---

* Такое приведение можно осуществлять, конечно, и не вводя векторного потенциала, но с помощью этого последнего оно достигается наиболее естественным путем.