§ 2. Вертикальный излучатель в однородной среде над идеально проводящей плоскостью

Рассмотрим ограниченную в пространстве систему вертикальных токов, обладающую симметрией вращения относительно вертикальной оси. Будем называть ее *вертикальным излучателем*, а ее ось симметрии — осью излучателя. Излучение будем считать происходящим в заполненное однородным диэлектриком полупространство („однородная атмосфера“), ограниченное горизонтальной плоскостью, являющейся границей идеального проводника (поверхность „земли“).

Введем цилиндрические координаты (r, φ, z) с осью z, направленной по оси излучателя, и началом на горизонтальной плоскости, уравнение которой в силу этого будет иметь вид: $z=0$. В соответствии с § 1 для отыскания электромагнитного поля излучателя надо решить неоднородное уравнение Гельмгольца для компоненты A_z векторного потенциала. Так как поле обладает симметрией вращения относительно оси излучателя, это уравнение в координатах (r, φ, z) будет иметь вид:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial A_z}{\partial r}\right)+\frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2}+k^2A_z=-4\pi\frac{\mu}{c}i_z^{(e)}, \tag{3}$$

причем компонента A_z не будет зависеть от φ.

С помощью формул, приведенных в задаче 2 к § 1, найдем, что компоненты векторов поля в рассматриваемом случае будут равны

$$\left.\begin{aligned} &E_r=\frac{i\omega}{ck^2}\frac{\partial}{\partial r}\frac{\partial A_z}{\partial z}, &&E_\varphi=0, &&E_z=\frac{i\omega}{c}A_z+\frac{i\omega}{ck^2}\frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2},\\ &H_r=0, &&H_\varphi=-\frac{1}{\mu}\frac{\partial A_z}{\partial r}, &&H_z=0,\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

т. е. поле вертикального излучателя представляет систему волн со взаимно перпендикулярными электрическим и магнитным векторами.

Согласно § 7 гл. XXIX единственное граничное условие, не выполняющееся на границе идеального проводника тождественно, в силу уравнений Максвелла, состоит в том, что тангенциальная компонента электрического вектора должна обращаться на границе в нуль. Это, в силу равенств (4), будет выполнено, если положить

$$\left.\frac{\partial A_z}{\partial z}\right|_{z=0}=0. \tag{5}$$

Наконец, на бесконечности должно быть выполнено условие излучения:

$$\lim_{z\to\infty} A_z=0. \tag{6}$$

Исключим из уравнения (3) с помощью интегрального преобразования операции дифференцирования по координате r. Рассмотрим с этой целью дифференциальное выражение

$$\mathscr{M}_r A_z = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial A_z}{\partial r}\right), \tag{7}$$

для которого $a_{rr}=1$, $b_r=\frac{1}{r}$, $c=0$, откуда по формулам (17) гл. XXXIII:

$$\rho(r)=r, \quad p(r)=r, \quad q=0. \tag{8}$$

Следовательно, ядро искомого интегрального преобразования должно быть решением уравнения

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial K}{\partial r}\right)+\gamma^2 rK=0.$$

Делением на r это уравнение приводится к уравнению Бесселя нулевого порядка:

$$\frac{\partial^2 K}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial K}{\partial r}+\gamma^2 K=0, \tag{9}$$

ограниченными решениями которого являются функции Бесселя $J_0(\gamma r)$. Таким образом, следует применить преобразование Ханкеля (гл. XXXIII, § 5, п. 4°) при $\nu=0$. Осуществив это преобразование, приведем задачу (3)—(5) к виду *:

$$\frac{\partial^2 \overline{A}_z}{\partial z^2}-(\gamma^2-k^2)\overline{A}_z=-4\pi\frac{\mu}{c}\overline{j}_z^{(e)}, \tag{10}$$

$$\overline{A}_z\big|_{z=0}=0, \qquad \lim_{z\to\infty}\overline{A}_z=0. \tag{11}$$

Общее решение уравнения (10) равно

$$\overline{A}_z(\gamma, z)=-\frac{2\pi}{c}\frac{\mu}{q}\int_0^z \overline{j}_z^{(e)}(\gamma, \zeta)\left[e^{q(z-\zeta)}-e^{-q(z-\zeta)}\right]d\zeta+B_1e^{qz}+$$
$$+B_2e^{-qz}=\frac{2\pi}{c}\frac{\mu}{q}\left[e^{qz}\left(B_1^*-\int_0^z \overline{j}_z^{(e)}(\gamma, \zeta)\,e^{-q\zeta}\,d\zeta\right)+\right.$$
$$\left.+e^{-qz}\left(B_2^*+\int_0^z \overline{j}_z^{(e)}(\gamma, \zeta)\,e^{q\zeta}\,d\zeta\right)\right], \tag{12}$$

где B_1, B_2, B_1^*, B_2^* — произвольные постоянные, а через q обозначен тот корень из (γ^2-k^2), вещественная часть которого положительна. Так как система токов излучателя по предположению

---

* Напомним, что этот результат записывается сразу на основании формулы (20) гл. XXXIII и замечаний о значении N_a, $\tilde{N}_b$ в § 3—4 гл. XXXIII.

ограничена в пространстве, вследствие чего начиная с некоторых z функция $\bar{j}_z^{(e)}(\gamma, z) = j_z^{(e)}(r, z) = 0$, то интегралы от выражений, содержащих множителем эту функцию, ограничены. Поэтому, чтобы обеспечить обращение в нуль функции $\bar{A}_z(\gamma, z)$ при $z \to \infty$, достаточно положить

$$B_1^* = \int_0^\infty \bar{j}_z^{(e)}(\gamma, \zeta)\, e^{-q\zeta}\, d\zeta. \tag{13}$$

Граничное условие (11), как легко видеть, даст

$$B_2^* = B_1^*. \tag{14}$$

Подставив найденные значения постоянных в решение (12) и доопределив функцию $j_z^{(e)}(r, z)$ для $z < 0$ четным образом, т. е. положив $j_z^{(e)}(r, -z) \equiv j_z^{(e)}(r, z)$, окончательно получим

$$\bar{A}_z(\gamma, z) = \frac{2\pi}{c}\frac{\mu}{q}\left(e^{qz}\int_z^\infty \bar{j}_z^{(e)}(\gamma, \zeta)\, e^{-q\zeta}\, d\zeta + e^{-qz}\int_{-z}^\infty \bar{j}_z^{(e)}(\gamma, \zeta)\, e^{-q\zeta}\, d\zeta\right). \tag{15}$$

Обратное преобразование Ханкеля

$$A(r, z) = \int_0^\infty \bar{A}_z(\gamma, z)\, J_0(\gamma r)\, \gamma d\gamma \tag{16}$$

даст решение поставленной задачи в форме некоторого определенного интеграла, который мы не будем здесь выписывать подробно.

Рассмотрим некоторые важные частные случаи.

Если излучатель представляет цилиндрический стержень радиуса r_0, расположенный в области $z_0 \leqslant z \leqslant z_1$, а плотность тока в поперечном сечении стержня распределена по закону

$$j_z^{(e)}(r, z) = \frac{j_0}{\sqrt{r_0^2 - r^2}} \qquad (r \leqslant r_0,\ z_0 \leqslant z \leqslant z_1),$$

где j_0 — постоянная, то

$$\bar{j}_z^{(e)}(\gamma, z) = j_0 \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{r_0^2 - \zeta^2}}\, J_0(\gamma\zeta)\, \zeta\, d\zeta = \begin{cases} j_0\dfrac{\sin \gamma r_0}{\gamma} & \text{при } z_0 \leqslant z \leqslant z_1, \\ 0 & \text{при } z < z_0,\ z > z_1. \end{cases} \tag{17}$$

Заметим, что полный ток, текущий через поперечное сечение стержня,

$$I = 2\pi j_0 \int_0^{r_0} \frac{r\, dr}{\sqrt{r_0^2 - r^2}} = 2\pi j_0 r_0. \tag{18}$$

Если мы заставим r_0 стремиться к нулю, одновременно увеличивая плотность тока так, чтобы величина полного тока оставалась неизменной, то получим

$$\lim_{r_0 \to 0} \bar{j}_z^{(e)}(\gamma, z) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi} I & \text{при} \quad z_0 \leqslant z \leqslant z_1, \\ 0 & \text{при} \quad z < z_0, \ z > z_1. \end{cases} \tag{19}$$

Этот случай соответствует вертикальному отрезку провода, поперечник которого пренебрежимо мал (*вертикальный линейный ток*).

Подставив выражение (19) в равенство (15), для значений z, лежащих вне интервала (z_0, z_1), получим

$$\bar{A}_z(\gamma, z) = \begin{cases} I \dfrac{\mu}{cq}(e^{qz} + e^{-qz}) \dfrac{e^{-qz_0} - e^{-qz_1}}{q} & \text{при} \quad z < z_0, \\ I \dfrac{\mu}{cq} e^{-qz} \dfrac{e^{qz_1} - e^{qz_0} + e^{-qz_0} - e^{-qz_1}}{q} & \text{при} \quad z > z_1. \end{cases} \tag{20}$$

Если точку z_1 сближать с точкой z_0, то, пользуясь разложением в ряды по малым разностям $(z_1 - z_0)$, найдем, что

$$\frac{1}{q}(e^{-qz_0} - e^{-qz_1}) = \frac{e^{-qz_0}}{q}(1 - e^{q(z_0 - z_1)}) \to e^{-qz_0}(z_1 - z_0),$$

$$\frac{1}{q}(e^{qz_1} - e^{qz_0}) = \frac{e^{qz_0}}{q}(e^{q(z_1 - z_0)} - 1) \to e^{qz_0}(z_1 - z_0).$$

Одновременно с уменьшением разности $(z_1 - z_0)$ будем увеличивать I так, чтобы произведение

$$P = I(z_1 - z_0)$$

сохраняло неизменное значение. В пределе, при $(z_1 - z_0) \to 0$, придем к случаю *колебательного электрического диполя с вертикальной осью* и моментом P, расположенного в точке $r = 0$, $z = z_0$. Соотношение (20) примет при этом вид

$$\bar{A}_z(\gamma, z) = \begin{cases} \dfrac{P\mu}{cq} e^{-qz_0}(e^{qz} + e^{-qz}) & \text{при} \quad z < z_0, \\ \dfrac{P\mu}{cq} e^{-qz}(e^{qz_0} + e^{-qz_0}) & \text{при} \quad z > z_0. \end{cases} \tag{21}$$

Выражения для $z < z_0$ и $z > z_0$ могут быть здесь объединены в одно:

$$\bar{A}_z(\gamma, z) = \frac{P\mu}{cq}(e^{-q|z - z_0|} + e^{-q|z + z_0|}), \tag{22}$$

пригодное при всех $z > 0$. Подставив это выражение в формулу (16) и вспомнив, что $q = \sqrt{\gamma^2 - k^2}$, получим:

$$A_z(r, z) = \frac{P\mu}{c} \int_0^\infty \frac{e^{-|z - z_0|\sqrt{\gamma^2 - k^2}} + e^{-|z - z_0|\sqrt{\gamma^2 - k^2}}}{\sqrt{\gamma^2 - k^2}} J_0(\gamma r)\gamma\, d\gamma.$$

Этот интеграл может быть вычислен с помощью известной из теории бесселевых функций формулы *

$$\int_0^\infty \frac{e^{-x\sqrt{\gamma^2-k^2}}}{\sqrt{\gamma^2-k^2}} J_0(\gamma y)\,\gamma\,d\gamma = \frac{e^{ik\sqrt{x^2+y^2}}}{\sqrt{x^2+y^2}}, \tag{23}$$

в силу которой

$$A_z(r, z) = \frac{P\mu}{c}\left[\frac{e^{ik\sqrt{(z-z_0)^2+r^2}}}{\sqrt{(z-z_0)^2+r^2}} + \frac{e^{ik\sqrt{(z+z_0)^2+r^2}}}{\sqrt{(z+z_0)^2+r^2}}\right]. \tag{24}$$

Эта формула допускает интересную интерпретацию.

Легко показать, что для диполя, расположенного в бесконечной однородной среде, направленная вдоль его оси компонента векторного потенциала равна

$$\frac{P\mu}{c}\frac{e^{ikR}}{R}, \tag{25}$$

где R — расстояние от диполя до точки наблюдения. Сравним это выражение с (24). Величина $\sqrt{(z-z_0)^2+r^2}$ в (24) также представляет расстояние от диполя, расположенного в точке $r=0$, $z=z_0$, до точки наблюдения $r=r$, $z=z$ (координата φ в силу симметрии поля может иметь любое значение). Величина же $\sqrt{(z+z_0)^2+r^2}$ формально представляет расстояние от точки наблюдения до точки $r=0$, $z=-z_0$, представляющей зеркальное отображение точки $r=0$, $z=z_0$ в нижнем полупространстве относительно границы раздела сред (плоскость $z=0$).

Таким образом, приходим к следующему выводу. Поле, создаваемое одиночным вертикально ориентированным диполем P в произвольной точке над идеально проводящей землей, таково же, как поле, которое создавалось бы в этой точке при отсутствии земли двумя такими же вертикально ориентированными и *колеблющимися в одной фазе* диполями, из которых один был бы расположен в той же точке, что и диполь P, а другой — в точке, представляющей ее зеркальное отражение относительно поверхности земли. В частности, отсюда следует, что поле диполя, расположенного на поверхности идеально проводящей земли, удваивается по сравнению с полем, которое создавалось бы в атмосфере при отсутствии земли. Действительно, при $z=0$ формула (24) даст

$$A_z(r, z) = \frac{2P\mu}{c}\frac{e^{ikR}}{R} \qquad \left(R=\sqrt{r^2+z^2}\right),$$

что равно удвоенному выражению (25).

* См. Р. О. Кузьмин [36], стр. 151.

ЗАДАЧИ

1. Исходя из уравнения (*) задачи 1 к предыдущему параграфу, показать, что в случае среды, электропроводность и диэлектрическая проницаемость которой зависят от координаты z (от высоты), вместо уравнения (10) получим уравнение

$$\frac{d}{dz}\left[\psi\,\frac{d\bar{A}_z(\gamma,\ z)}{dz}\right]-(1+\psi\gamma^2)\,\bar{A}_z(\gamma,\ z)=-4\pi\,\frac{\mu}{c}\,\psi\bar{j}_z^{(e)}(\gamma,\ z),$$

где функция $\psi=-\frac{1}{k^2}$.

2. Показать, что при $\psi=\alpha(z-z_0)^2$, где α и z_0 — постоянные, однородное уравнение, соответствующее неоднородному уравнению предыдущей задачи, приводится к уравнению

$$\frac{d^2u}{d\xi^2}+\frac{2}{\xi}\,\frac{du}{d\xi}-\left(\gamma^2+\frac{1}{\alpha\xi^2}\right)u=0\quad(\xi=z-z_0),$$

решениями которого являются цилиндрические функции

$$Z_\nu(\sqrt{-\gamma\xi})\quad\left(\nu=\sqrt{\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{4}}\right).$$

3. Обосновать «закон отражения переменных токов в идеально проводящей плоскости», согласно которому электромагнитное поле, созданное системой протекающих над плоскостью токов, в любой точке над плоскостью совпадает с полем, которое было бы создано в этой же точке при отсутствии идеально проводящей плоскости системой токов, образуемых следующим образом. К исходной системе токов присоединяется ее зеркальное отражение относительно рассматриваемой плоскости. Затем направление токов в отраженной системе меняется на обратное.

Указание. Для обоснования указанного правила достаточно показать, что отраженная система токов после изменения их направления создает в точках плоскости поле, полностью компенсирующее поле, созданное исходной системой токов

4. Показать, применительно к условиям задачи, решенной в этом параграфе, что диполь, расположенный в точке N, создает в точке M такое же поле, какое он создал бы в точке N, будучи расположен в точке M.

§ 3. Вертикальный излучатель в однородной среде над средой с конечной электропроводностью

Рассмотрим теперь задачу предыдущего параграфа, но при действии вертикального излучателя над средой с конечной электропроводностью σ_i. В соответствии с этим будем различать верхнюю и нижнюю среды. В случае необходимости отметить, что данная величина относится к какой-либо одной среде, будем пользоваться индексом e для верхней и индексом i — для нижней среды.

Постановка задачи, очевидно, в основных чертах останется той же, что и выше, однако теперь электромагнитное поле будет отлично от нуля и в полупространстве $z<0$, в соответствии с чем уравнение Гельмгольца (3) для верхней среды необходимо распространить и на нижнюю среду, где оно будет однородным