ЗАДАЧИ

1. Исходя из уравнения (*) задачи 1 к предыдущему параграфу, показать, что в случае среды, электропроводность и диэлектрическая проницаемость которой зависят от координаты z (от высоты), вместо уравнения (10) получим уравнение

$$\frac{d}{dz}\left[\psi\,\frac{d\bar{A}_z(\gamma,\ z)}{dz}\right]-(1+\psi\gamma^2)\,\bar{A}_z(\gamma,\ z)=-4\pi\,\frac{\mu}{c}\,\psi\bar{j}_z^{(e)}(\gamma,\ z),$$

где функция $\psi=-\frac{1}{k^2}$.

2. Показать, что при $\psi=\alpha(z-z_0)^2$, где α и z_0 — постоянные, однородное уравнение, соответствующее неоднородному уравнению предыдущей задачи, приводится к уравнению

$$\frac{d^2u}{d\xi^2}+\frac{2}{\xi}\,\frac{du}{d\xi}-\left(\gamma^2+\frac{1}{\alpha\xi^2}\right)u=0\quad(\xi=z-z_0),$$

решениями которого являются цилиндрические функции

$$Z_\nu\left(\sqrt{-\gamma\xi}\right)\quad\left(\nu=\sqrt{\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{4}}\right).$$

3. Обосновать «закон отражения переменных токов в идеально проводящей плоскости», согласно которому электромагнитное поле, созданное системой протекающих над плоскостью токов, в любой точке над плоскостью совпадает с полем, которое было бы создано в этой же точке при отсутствии идеально проводящей плоскости системой токов, образуемых следующим образом. К исходной системе токов присоединяется ее зеркальное отражение относительно рассматриваемой плоскости. Затем направление токов в отраженной системе меняется на обратное.

Указание. Для обоснования указанного правила достаточно показать, что отраженная система токов после изменения их направления создает в точках плоскости поле, полностью компенсирующее поле, созданное исходной системой токов

4. Показать, применительно к условиям задачи, решенной в этом параграфе, что диполь, расположенный в точке N, создает в точке M такое же поле, какое он создал бы в точке N, будучи расположен в точке M.

§ 3. Вертикальный излучатель в однородной среде над средой с конечной электропроводностью

Рассмотрим теперь задачу предыдущего параграфа, но при действии вертикального излучателя над средой с конечной электропроводностью σ_i. В соответствии с этим будем различать верхнюю и нижнюю среды. В случае необходимости отметить, что данная величина относится к какой-либо одной среде, будем пользоваться индексом e для верхней и индексом i — для нижней среды.

Постановка задачи, очевидно, в основных чертах останется той же, что и выше, однако теперь электромагнитное поле будет отлично от нуля и в полупространстве $z<0$, в соответствии с чем уравнение Гельмгольца (3) для верхней среды необходимо распространить и на нижнюю среду, где оно будет однородным и иметь другое значение параметра $k^2=k_i^2$:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial A_z}{\partial r}\right)+\frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2}+k_i^2A_z=0 \qquad \left(k_i^2=\frac{\omega^2\varepsilon_i\mu_i+4\pi i\omega\mu_i\sigma_i}{c^2},\ z<0\right). \tag{26}$$

Далее следует изменить граничное условие. Вместо обращения в нуль на границе раздела сред тангенциальной компоненты электрического вектора, теперь следует потребовать непрерывности тангенциальных компонент векторов поля (гл. XXIX, § 7), что, в силу (4), будет выполнено, если

$$\frac{1}{\mu_e}A_{ze}\Big|_{z=0}=\frac{1}{\mu_i}A_{zi}\Big|_{z=0}, \qquad \frac{1}{k_e^2}\frac{\partial A_{ze}}{\partial z}\Big|_{z=0}=\frac{1}{k_i^2}\frac{\partial A_{zi}}{\partial z}\Big|_{z=0}. \tag{27}$$

Эти выражения, очевидно, сохранят свой вид и при замене компонент A_z их преобразованиями Ханкеля.

Для векторного потенциала в верхней среде останется справедливым соотношение (12), поскольку его вывод не был связан с использованием граничных условий, а также и (13), поскольку условия при $z\to\infty$ остаются неизменными.

Выражение для преобразования Ханкеля векторного потенциала в нижней среде можно сразу написать на основании соотношения (12). Заметив, что в нижней среде сторонние токи отсутствуют (излучатель предполагается, конечно, расположенным в верхней среде), вследствие чего $\bar{j}_{zi}^{(e)}(\gamma, z)=0$, и что из условия стремления к нулю поля при $z\to-\infty$ для нижней среды следует положить $B_2^*=0$, получим

$$\bar{A}_{zi}(\gamma, z)=\frac{2\pi}{c}\frac{\mu_i}{q_i}Ce^{q_i z}, \tag{28}$$

где q_i — корень из $(\gamma^2-k_i^2)$, имеющий положительную вещественную часть, а C — постоянная.

Для удовлетворения двух граничных условий (27) мы располагаем двумя постоянными C и B_2^*. Используя граничные условия (27), придем к уравнениям:

$$\frac{C}{q_i}=\frac{1}{q_e}(B_1^*+B_2^*), \qquad \frac{C\mu_i}{k_i^2}=\frac{\mu_e}{k_e^2}(B_1^*-B_2^*),$$

откуда

$$C=\frac{2\mu_e q_i k_i^2}{\mu_e q_e k_i^2+\mu_i q_i k_e^2}B_1^*, \qquad B_2^*=\frac{\mu_e q_e k_i^2-\mu_i q_i k_e^2}{\mu_e q_e k_i^2+\mu_i q_i k_e^2}B_1^*.$$

Дальнейшие выкладки проведем только для случая вертикального диполя, расположенного в точке $r=0$, $z=z_0$. При этом

$$B_1^*=\frac{P}{2\pi}e^{-q_e z_0},$$

где P — момент диполя. После несложных выкладок получим:

$$\overline{A}_{ze}(\gamma, z) = \begin{cases} \dfrac{P\mu_e}{cq_e} \dfrac{(\mu_e q_e k_i^2 + \mu_i q_i k_e^2) e^{-q_e(z_0 - z)} + (\mu_e q_e k_i^2 - \mu_i q_i k_e^2) e^{-q_e(z_0+z)}}{\mu_e q_e k_i^2 - \mu_i q_i k_e^2} \\ \qquad\qquad \text{при } 0 < z < z_0, \\ \dfrac{2P\mu_e}{c} \dfrac{k_i^2 e^{-q_e(z_0+z)}}{\mu_e q_e k_i^2 + \mu_i q_i k_e^2} \quad \text{при } z > z_0, \end{cases} \tag{29}$$

$$\overline{A}_{zi}(\gamma, z) = \frac{2P}{c} \frac{\mu_i \mu_e k_i^2 e^{-q_e z_0 + q_i z}}{\mu_e q_e k_i^2 + \mu_i q_i k_e^2} \quad \text{при } z < 0. \tag{30}$$

При $z_0 = 0$, пользуясь формулой преобразования к переменной r, получим решение Зоммерфельда для диполя на проводящей земле:

$$A_z(r, z) = \frac{2P\mu_e}{c} k_i^2 \int_0^\infty \frac{e^{-z\sqrt{\gamma^2 - k_e^2}} J_0(\gamma r)\gamma d\gamma}{\mu_e k_i^2 \sqrt{\gamma^2 - k_e^2} + \mu_i k_e^2 \sqrt{\gamma^2 - k_i^2}} \quad (z > 0), \tag{31}$$

$$A_z(r, z) = \frac{2P\mu_i\mu_e}{c} k_i^2 \int_0^\infty \frac{e^{z\sqrt{\gamma^2 - k_i^2}} J_0(\gamma r)\gamma d\gamma}{\mu_e k_i^2 \sqrt{\gamma^2 - k_e^2} + \mu_i k_e^2 \sqrt{\gamma^2 - k_i^2}} \quad (z < 0). \tag{32}$$

Эти выражения значительно сложнее для анализа, чем аналогичные соотношения в случае идеально проводящей земли.

§ 4. Магнитная антенна над средой с конечной электропроводностью

Рассмотрим излучатель в форме круглой цилиндрической катушки с обмоткой из проводника, по которому течет ток. Такой излучатель с вертикально расположенной осью называют *вертикальной магнитной антенной*.

Будем считать, что основание рассматриваемой антенны расположено на плоской границе раздела однородного диэлектрика (атмосфера или верхняя среда) и проводника (земля или нижняя среда). Линии тока будем предполагать концентрическими окружностями, лежащими в плоскостях, параллельных поверхности раздела сред, с центрами, расположенными на оси катушки.

В соответствии с соображениями, изложенными в § 1, ввиду отсутствия в рассматриваемой антенне вертикальных токов, допустим, что вертикальная компонента векторного потенциала равна нулю. При этом предположении, в декартовых координатах с осями x_1 и x_2, расположенными в плоскости горизонта, для отыскания поля магнитной антенны получим два уравнения:

$$\Delta A_1 + k^2 A_1 = -\frac{4\pi\mu}{c} j_1^{(e)}, \tag{33}$$

$$\Delta A_2 + k^2 A_2 = -\frac{4\pi\mu}{c} j_2^{(e)}. \tag{34}$$